

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y  
CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN



**Geometría Tropical de Rango Mayor para Analizar la Demanda Ante  
Perturbaciones**

**Autor: Jaime Ignacio Tobar Moncada**

**Profesor Guía: Hernán Iriarte Carrasco.**

**Trabajo de Titulación presentado en conformidad a los requisitos para  
obtener el grado de Ingeniería en Matemáticas**

**Santiago - Chile  
2023**

©2023, Jaime Ignacio Tobar Moncada

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

# Resumen

Baldwin y Klemperer (2019) descubrieron que la mecánica de las subastas *Product-Mix* puede ser modelada con hipersuperficies tropicales a través del análisis de la variación de la demanda ante perturbación en los precios de una familia finita de agentes en una economía con  $n$  tipos de bienes indivisibles. En el presente manuscrito, presentamos una revisión de la teoría de hipersuperficies tropicales junto con el análisis geométrico tropical que exponen los autores aquí referidos. Además, por nuestra parte introducimos el análisis de la demanda ante perturbaciones tanto en los precios como en las valoraciones de los consumidores. Estudiando la generalización de la geometría tropical bajo la noción de rango mayor, tenemos la geometría tropical de rango mayor, una geometría basada en el semianillo tropical de rango  $k$ ,  $\mathbb{T}_k = \{\mathbb{R}_k \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot\}$ . Nuestro Teorema de Hemicontinuidad superior de la demanda nos asegura que la demanda decrece ante perturbaciones en la valoración y precio pero no nos dice el como varía exactamente. El teorema de dualidad tropical de rango mayor extiende el entendimiento de la demanda de los consumidores ante perturbaciones en sus valoraciones y esto logra caracterizar, en esencia, la variación de la demanda ante una perturbación de la valoración del consumidor.



# Agradecimientos

# Tabla de contenidos

<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción a la Geometría Tropical</b>	<b>7</b>
1.1. Preliminares . . . . .	7
1.1.1. Complejos poliedrales . . . . .	10
1.1.2. Subdivisiones regulares . . . . .	15
1.2. Geometría tropical . . . . .	17
1.3. Dualidad . . . . .	25
<b>2. Análisis Geométrico de la Demanda Indivisible con Geometría Tropical</b>	<b>34</b>
2.1. Geometría de la demanda indivisible . . . . .	34
2.1.1. Elementos de la teoría del consumidor . . . . .	34
2.1.2. Interpretación económica de la geometría tropical . . . . .	36
2.2. Tipos de demanda . . . . .	39
2.2.1. Ejemplos de tipos de demanda . . . . .	40
2.3. Demanda agregada y equilibrio . . . . .	42
2.3.1. Estructura de la demanda agregada . . . . .	42
2.3.2. Equilibrio competitivo . . . . .	45
2.4. El teorema de unimodularidad . . . . .	48
<b>3. Análisis de la Perturbación de una Preferencia</b>	<b>51</b>
3.1. La perturbación de valuaciones y el teorema de hemicontinuidad de la demanda	51
3.1.1. El problema de describir la variación de la demanda . . . . .	52
3.2. Geometría tropical de rango superior . . . . .	53
3.2.1. El semianillo tropical de rango superior y los números duales generalizados . . . . .	53
3.2.2. Fibraciones iteradas y subdivisiones regulares por capas . . . . .	56
3.2.3. Hipersuperficies tropicales y politopos de Newton . . . . .	59
3.3. Análisis geométrico de la perturbación de la demanda . . . . .	62

<b>4. Resultados, conclusiones y recomendaciones</b>	<b>67</b>
4.1. Resultados . . . . .	67
4.2. Conclusiones . . . . .	68
4.3. Recomendaciones . . . . .	69
4.3.1. Matrimonios estables . . . . .	70
<b>Bibliografía</b>	<b>72</b>
<b>A. Utilizando Polymake para objetos tropicales</b>	<b>74</b>
A.1. Instalación y lanzamiento . . . . .	74
A.2. Visualizar formas de hipersuperficies tropicales . . . . .	75
A.3. Determinar equilibrio competitivo . . . . .	76
A.4. Códigos de figuras . . . . .	78

# Índice de Ilustraciones

1.	Caras $k$ -dimensionales en $\text{SNewt}(f)$ normales a caras, del mismo color, $(2 - k)$ -dimensionales en $\mathcal{T}(f)$ . $k = 0, 1, 2$ . . . . .	4
2.	Preferencias de dos agentes con valoraciones por peras y manzanas. . . . .	4
1.1.	Envolturas convexas de diferentes conjuntos de puntos (en azul) simulando un geoplano visto desde <i>arriba</i> . . . . .	8
1.2.	Ejemplos y no ejemplos de subconjuntos convexos y discretamente convexos. . . . .	8
1.3.	Ejemplos y no ejemplos de funciones convexas y discretamente convexas. . . . .	10
1.4.	Ejemplo de un hiperplano descrito por la recta verde en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	11
1.5.	Bola de centro un punto cualquiera dentro de la cara consistente en un segmento de línea y radio $\varepsilon$ . . . . .	12
1.6.	Objetos geometricos, (a) y (b) en $\mathbb{R}^2$ , que poseen estructura de complejo poliedral. . . . .	13
1.7.	Vector primitivo $x$ asociado a una cara $\sigma$ en un complejo $(n - 1)$ -dimensional. . . . .	14
1.8.	Complejo poliedral con pesos $\omega_i$ y vectores primitivos $x_i$ asociados a sus facetas. Con $i = 1, \dots, 4$ . . . . .	15
1.9.	Ejemplo de una subdivisión regular. . . . .	16
1.10.	Ejemplo de la proyección de las caras superiores de $P^u$ que definen la subdivisión regular. . . . .	17
1.11.	Gráfico de $p(x)$ . . . . .	19
1.12.	El conjunto $\mathcal{T}(f)$ inducido por $f(x, y)$ . . . . .	20
1.13.	Ejemplos de hipersuperficies tropicales. . . . .	22
1.14.	Soporte de $q$ . . . . .	25
1.15.	Polígono de Newton asociado a $q$ . . . . .	25
1.16.	$\text{Newt}(p_1)$ . . . . .	26
1.17.	$\text{SNewt}(p_1)$ . . . . .	26
1.18.	Subdivisión $\text{SNewt}(p_1)$ y una curva tropical dual $\mathcal{T}(p_1)$ . . . . .	30
1.19.	Caras $k$ -dimensionales en $\text{SNewt}(p_1)$ ortogonales a caras ,del mismo color, $(2 - k)$ -dimensionales en $\mathcal{T}(p_1)$ . . . . .	31
1.20.	Acercamiento al punto $(0, -1)$ en $\mathcal{T}(p_1)$ . . . . .	31
1.21.	Curva tropical que cumple la condición de balance con facetas y facetas normales coloreadas . . . . .	32
2.1.	LPI para la valoración $u$ tal que $u(0, 0) = 0$ , $u(1, 0) = a$ , $u(0, 1) = b$ . . . . .	37
2.2.	Dualidad entre el complejos de precios y el complejo de demanda . . . . .	39

2.3. Vectores normales $x_1$ , $x_2$ y $x_3$ que forman el tipo de demanda para algún $\mathcal{L}$ que tiene la forma característica de esta figura. . . . .	40
2.4. Ejemplo de demanda y valoración agregada. . . . .	45
2.5. Posibles asignaciones, coloreadas, en $\text{SNewt}(f_u)$ , para las que existe equilibrio competitivo y respetan el inventario del mercado (1 habitación mediana y una pequeña). . . . .	47
3.1. Ejemplo de una fibración de rango 2. . . . .	57
A.1. Curva tropical elíptica $\mathcal{T}(f)$ de salida en <code>polymake</code> . . . . .	76
A.2. Visualización de objetos tropicales en <code>polymake</code> . . . . .	77

# Introducción

La noción de dualidad es fundamental en la matemática pero de forma particular en la geometría. Más que un teorema, la dualidad es un principio que relaciona distintos espacios, el primal y su dual, para obtener diferentes enfoques a la misma problemática. Esta noción tiene una larga historia, sus orígenes se remontan a la geometría proyectiva. [Cremona \(1885\)](#) relata que todo inicia con el trabajo de [Gergonne \(1825 – 1826\)](#) en óptica, como una consecuencia de el *principio de reciprocidad polar* que expuso [Poncelet \(1817 – 1818\)](#). El entendimiento de sus ideas llevó a la noción de dualidad en álgebra lineal y sus generalizaciones en el análisis convexo y otras áreas. Este manuscrito explota una nueva arista de la dualidad en geometría, una que vive en el contexto de la *geometría tropical* y que tiene aplicaciones prácticas más allá de la matemática.

La geometría tropical es un campo relativamente nuevo en las matemáticas, apareciendo en la literatura a finales del siglo XX. Las raíces de la geometría tropical se remontan a la optimización, donde se utilizó el *álgebra min-plus* para obtener nuevas perspectivas en problemas clásicos del área. Fue en la década de los 90 cuando se definió objetos geométricos, como rectas y cónicas, en términos de esta álgebra, dandon origen a la geometría tropical. El término *tropical* fue acuñado por el matemático francés [Pin \(1998\)](#) en honor a su colega Brasileño [Magri \(1978\)](#), quien fue uno de los precursores en el uso del álgebra min-plus. El término no tiene más significado que la visión francesa de Brasil, que se caracteriza por tener clima tropical. Hoy en día, podemos ver la geometría tropical en aplicaciones teóricas como la relación de la *geometría algebraica* con la *combinatoria*, y aplicaciones prácticas como en la *teoría de árboles filogenéticos* en biología [Monod y otros \(2018\)](#), *redes neuronales prealimentadas con activación ReLu* en machine learning [Zhang y otros \(2018\)](#), entendimiento de la *demanda indivisible* en economía entre otras. Esta última aplicación es la conexión con la economía en la que estamos interesados. La demanda indivisible, dadas valoraciones de los consumidores, puede entenderse naturalmente con la geometría tropical y esto es lo que ocurre en las subastas Product-Mix [Baldwin y Klemperer \(2013\)](#).

Por otro lado, una subasta es un proceso que toma una colección de pujas y produce un conjunto de ganadores, asignaciones y precios que los ganadores deben pagar. Las subastas responden a una de las preguntas más importantes de la economía: ¿quién debe obtener los bienes y a qué precio? [Milgrom \(1987\)](#) y otros autores de la literatura de subastas nos relatan que Herodoto tiene atribuido el registro más antiguo sobre subastas, en la civilización Babilónica el año 500 A.C. pero esta podría no ser la primera aparición. Herodoto puede no haber sido el primero en registrar una subasta. Algunos eruditos interpretan el relato bíblico de la venta de José, el bisnieto de Abraham, como esclavo como una subasta. Y

si bien las subastas han sido utilizadas desde tiempos antiquísimos, no es hasta el siglo XX que comienza a construirse la teoría y [Vickrey \(1961\)](#) es uno de los que da el punto de partida a la escritura y explotación de la literatura de teoría de subastas. Hoy en día, a más de 60 años, la teoría de subastas es de los campos con más potencial de aporte en la literatura e influyentes de la economía. Un ejemplo de esto es la entrega del premio nobel de economía 2020 a Paul Milgrom y Robert Wilson por sus aportes a la teoría de subastas y nuevos diseños de subastas. El diseño de subastas que tiene todo nuestro interés son las *subastas Product-Mix* ideadas por [Klemperer \(2009\)](#) para que el Banco de Inglaterra pudiera entregar liquidez a los bancos comerciales de manera más eficiente en la crisis económica del 2007. Como juego, se caracteriza por su simplicidad e intuición. En particular, si existe un *equilibrio competitivo*, entonces los agentes que quieren maximizar su utilidad deberían ofertar su verdadera valoración de las cestas de consumo, y este es un resultado económico deseable.

Esta tesis trata sobre las aplicaciones de la noción de dualidad en geometría tropical a la teoría de subastas en economía y, mediante la noción de un rango mayor, extender nociones de la teoría descrita por [Klemperer \(2009\)](#). Tales como equilibrio competitivo, la demanda indivisible y precios competitivos.

## De la Geometría Tropical a las Subastas Product-Mix

En esencia, la geometría tropical es la geometría basada en el semianillo tropical  $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$  que es el sistema numérico consistente en los números reales  $\mathbb{R}$  equipados de un elemento  $-\infty$  que posee la propiedad de ser más pequeño que cualquier número real, junto con la *suma tropical* y el *producto tropical*, definidos respectivamente por

$$a \oplus b := \max\{a, b\}, \quad \text{y} \quad a \odot b := a + b. \quad \text{para todo } a, b \in \mathbb{T}.$$

La geometría tropical corresponde al entendimiento geométrico de los polinomios con coeficientes en el semianillo tropical. Estos polinomios determinan funciones lineales por partes cuyos *ceros tropicales* forman un complejo poliedral llamado la hipersuperficie tropical. Así la geometría tropical puede ser vista como una versión poliedral de la geometría algebraica.

Para nuestro estudio, cualquier función  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$  consideramos tres importantes objetos, un *polinomio tropical de Laurent*  $f_u$ , una *hipersuperficie tropical*  $\mathcal{T}(f_u)$  y una *subdivisión regular*  $\text{SNewt}(f_u)$  de  $A$ . Definimos el polinomio tropical de Laurent  $f_u$  con soporte finito  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$  y coeficientes  $u(a) \in \mathbb{R}$  como

$$f_u := \bigoplus_{a \in A} u(a) \odot x^a \in \mathbb{T}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]. \quad (1)$$

Cuya expresión podemos reescribir  $f_u(x) = \max_{a \in A} \{u(a) + \langle x, a \rangle\}$ .

La hipersuperficie tropical  $\mathcal{T}(f_u)$  del polinomio tropical  $f_u$  es definida por los  $x \in \mathbb{R}^n$  tales que el conjunto definido por

$$D_u(p) := \operatorname{argmax}\{u(a) + \langle a, p \rangle : x \in A\} \quad (2)$$

posee cardinalidad mayor o igual a 2. Equivalentemente,  $\mathcal{T}(f_u)$  es el conjunto

$$\mathcal{T}(f_u) := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{El máximo en } f_u(x) \text{ se alcanza al menos dos veces}\}. \quad (3)$$

Notemos que, la función  $f_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  inducida por el polinomio es convexa y lineal a trozos, y  $\mathcal{T}(f_u)$  es el lugar geométrico donde la función  $f(x)$  no es suave. La subdivisión regular  $\text{SNewt}(f_u)$  de  $A$  inducida por  $u$  es definida como el conjunto

$$\text{SNewt}(f_u) := \{\text{conv}(\text{argmax}_{a \in A}(u(a) \odot x^a)) : x \in \mathbb{R}^n\}. \quad (4)$$

El cual es una colección de subconjuntos de  $\text{conv}(A)$ . Llamaremos cara de  $\text{SNewt}(f_u)$  a los conjuntos de la forma  $\sigma := \text{conv}(D_u(x))$  para algún  $x \in \mathbb{R}^n$ .

El *teorema de dualidad 1.3.1* nos dice que la subdivisión regular  $\text{SNewt}(f_u)$  es *dual* a la hipersuperficie tropical en el sentido que existe una biyección natural entre caras de  $\text{SNewt}(f_u)$  y caras de  $\mathcal{T}_u$ , como se sigue a continuación. Sea  $f_u$  un polinomio tropical como en (1), considere la siguiente relación de equivalencia sobre  $\mathbb{R}^n$ : dos puntos  $x, x' \in \mathbb{R}^n$  son equivalentes si

$$\text{argmax}\{u(a) + \langle a, x \rangle : a \in A\} = \text{argmax}\{u(a) + \langle a, x' \rangle : a \in A\}.$$

Esto entrega una partición de  $\mathbb{R}^n$  donde cada clase de equivalencia es el interior relativo de un poliedro convexo, definido por ecuaciones lineales y desigualdades lineales estrictas. La hipersuperficie tropical es la unión de las clases de equivalencia de dimensión menor que  $n$  en esta partición. La correspondencia

$$[x] \longleftrightarrow \text{argmax}\{u(a) + \langle a, x \rangle : a \in A\}$$

es una biyección entre las clases de equivalencia en  $\mathbb{R}^n$  y caras de  $\text{SNewt}(f_u)$ .

Por ejemplo, cuando todos los coeficientes  $u(a)$  del polinomio tropical  $f_u = \bigoplus_{a \in A} u(a) \odot x^a$  son iguales a cero, entonces la hipersuperficie tropical depende únicamente del politopo de Newton  $\text{Newt}(f_u) := \text{conv}(A)$  y corresponde a el  $n - 1$ -esqueleto de su abanico normal.

Geoméricamente está pasando lo siguiente. Considere  $f$  un polinomio tropical, el teorema de dualidad nos dice que existe una biyección entre caras de  $\text{SNewt}(f)$  y caras de  $\mathbb{R}^n$  particionado por los interiores relativos de  $\mathcal{T}(f)$  equipado con estructura de complejo poliedral. En este sentido tenemos que caras  $n$ -dimensionales de  $\text{SNewt}(f)$  son normales a caras de codimensión  $n$  en  $\mathcal{T}(f)$  y se preservan inversamente las propiedades de incidencia. Por ejemplo, consideremos  $n = 2$ , y el polinomio tropical  $f = "1 + 1xy + x + y + x^2 + y^2"$ . En  $\text{SNewt}(f)$  dos puntos generan una arista, en  $\mathcal{T}(f)$  dos caras de dimensión dos también generan una arista, ya que un punto es dual a una cara de dimensión dos y una arista es dual a una arista.

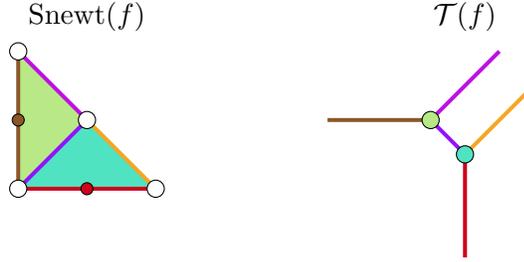


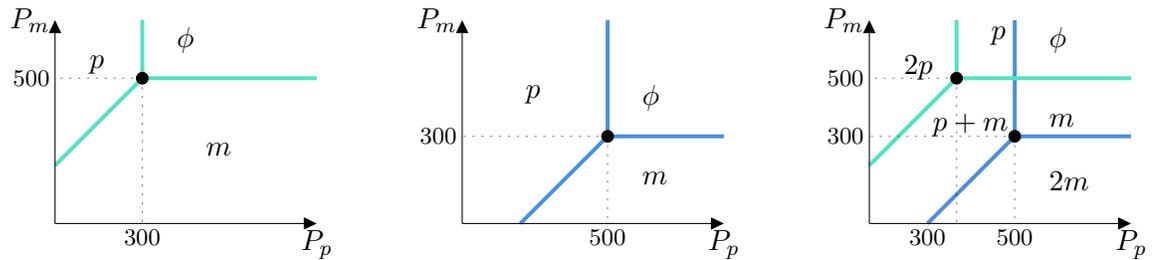
Figura 1: Caras  $k$ -dimensionales en  $SNewt(f)$  normales a caras, del mismo color,  $(2 - k)$ -dimensionales en  $\mathcal{T}(f)$ .  $k = 0, 1, 2$ .

Pensemos ahora en teoría de subastas, y veamos como la geometría tropical aparece naturalmente. Consideremos dos agentes consumidores,  $u^1$  y  $u^2$ , que deben elegir entre Peras y Manzanas. El agente  $u^1$  está dispuesto a comprar una manzana por 300 (pesos) y una pera por 500. El agente  $u^2$  está dispuesto a pagar 500 por la pera y 400 por la manzana. Lo que han hecho los agentes es entregar sus valoraciones por dos cestas de consumo, es decir, lo máximo que están dispuesto a pagar por cesta. Mediante estas valoraciones de agentes, podemos deducir sus preferencias. Asumimos que tienen preferencias quasi lineales y estas son inducidas por

$$f_{u^1}(P_p, P_m) = \max\{300 - P_p, 500 - P_m, 0\}$$

$$f_{u^2}(P_p, P_m) = \max\{500 - P_p, 400 - P_m, 0\}$$

donde  $P_p$  y  $P_m$  son los precios de la pera y la manzana respectivamente, y donde el 0 asegura que los agente nunca poseen utilidad negativa. Los precios a los que el agente es indiferente entre más de una cesta son aquellos en los que su conjunto de demanda,  $D_u(p) := \operatorname{argmax}_{x \in A} \{u(x) - \langle p, x \rangle\}$ , contiene varias cestas. Estos precios son el lugar geométrico donde las funciones  $f_{u^1}$  y  $f_{u^2}$  se maximizan más de una vez. Luego las preferencias de  $u^1$  y  $u^2$  están descritas por las curvas



(a) Preferencias del agente  $u^1$  (b) Preferencias del agente  $u^2$  (c) Preferencias de los agentes  $u^1$  y  $u^2$  en agregado. ante cambios en los precios. ante cambios en los precios.

Figura 2: Preferencias de dos agentes con valoraciones por peras y manzanas.

Así podemos inferir, mediante sus valoraciones, el comportamiento de la preferencia de un consumidor ante la variación de precio de los bienes.

De forma general, considerar el caso donde una familia finita  $J$  de agentes valoran cestas de  $n$  tipos de bienes. Cada agente  $j \in J$  posee una función de valoración

$$u^j : A^j \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

donde valora la cesta  $a \in A^j$  en la cantidad  $u^j(a)$ . La utilidad del agente es la diferencia  $u^j(a) - \langle a, p \rangle$ , donde  $p \in \mathbb{R}^n$  es un vector de precios para la cesta  $a \in A^j$ . Lo anterior es bastante intuitivo, es la diferencia entre la valoración que dio el  $j$ -ésimo agente por la cesta  $a \in A^j$  y el precio de  $a$ . De esta forma, el agente lo que busca es maximizar sus utilidades en las valoraciones que realiza, esto es

$$f_u(p) = \max_{a \in A^j} \{u^j(a) - \langle a, p \rangle\} \quad (5)$$

e inmediatamente notamos que (5) es el polinomio tropical

$$f_u(p) = \bigoplus_{a \in A^j} (u(a) \odot p^{-a}) \quad (6)$$

y todos los objetos tropicales que hemos estudiado tienen interpretación económica en el entendimiento de la demanda que posee la familia  $J$  de agentes frente a una oferta de mercado de  $n$  tipos de bienes. Esto, en el caso práctico y real, representa un modelo de subastas llamado Product-Mix Auction, ideado por [Klemperer \(2009\)](#), [Klemperer \(2010\)](#).

## Organización del documento

El primer capítulo presenta los aspectos teóricos intrínsecos de la geometría tropical. Preliminarmente se exponen nociones de geometría poliedral, esto es, convexidad de conjuntos y funciones, poliedros y politopos, el interior relativo, complejos poliedrales balanceados bajo una noción de *peso* para sus facetas y subdivisiones regulares. Esto es necesario debido a que los objetos de la geometría tropical, como lo son las hipersuperficies tropicales y las subdivisiones regulares de politopos de Newton, están dotados de una estructura de complejo poliedral. El teorema más importante de este capítulo es el Teorema de Dualidad, que establece una correlación biyectiva entre las caras de la subdivisión regular y las caras de  $\mathbb{R}^n$  particionado por la hipersuperficie tropical dual. Esto desencadena importantes resultados prácticos como, por ejemplo, en las subastasta del tipo *Product-Mix*.

El segundo capítulo presenta la literatura económica que utiliza naturalmente la geometría tropical para definir objetos económicos en subastas del tipo *Product-Mix*. Estudiando la demanda indivisible de una colección finita  $J$  de agentes que poseen valoraciones ordenadas,  $u^j : A^j \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , por cestas de consumo en una economía con  $n$  tipos de bienes indivisibles. Deducimos las funciones de utilidad que poseen los agentes que pujan por las cestas que permite la oferta o inventario de mercado. Es entonces que las funciones de utilidad de los agentes son, naturalmente, polinomios tropicales y de inmediato los objetos tropicales que estudiamos tienen interpretación económica como lo son, el locus de precios de indiferencia de los agentes (hipersuperficie tropical) y el conjunto de demanda (subdivisión del politopo de Newton). El teorema más notable de este capítulo es el Teorema de Unimodularidad, que garantiza condiciones donde siempre existe equilibrio competitivo.

El tercer capítulo presenta un estudio de nuevos objetos para la geometría tropical y la teoría de subastas. Dotando al espacio vectorial  $\mathbb{R}^k$  del orden lexicográfico, construimos el semianillo tropical de rango  $k$   $\mathbb{T}_k$ . El estudio de las hipersuperficies con respecto a este semianillo corresponde al estudio de las perturbaciones de hipersuperficies tropicales. Desde el punto de vista económico las valoraciones con valores en este semianillo corresponden al análisis de agentes con preferencias lexicográficas o, desde un punto de vista diferente, la perturbación en las valoraciones de los agentes y como está afectada la demanda.

# Capítulo 1

## Introducción a la Geometría Tropical

La geometría tropical que es introducida en este capítulo forma el aparato técnico en el cual fundamentamos todo lo expuesto en este manuscrito. Aquí estaremos varados en lo que [Maclagan y Sturmfels \(2021\)](#) refieren, en su primer capítulo, como *tropical islands*, es decir, los objetos con los que trabajamos teórica y prácticamente son naturalmente objetos tropicales, esto es, no necesitan ser definido por agentes externos a esta geometría<sup>1</sup>.

La primera sección de este capítulo aborda conceptos preliminares sobre geometría poliedral. Conceptos que son de vital importancia, dado que los objetos tropicales que estudiamos son esencialmente poliedrales. La segunda sección aborda una introducción a la geometría tropical y, más específicamente, un estudio sobre hipersuperficies tropicales donde establecemos la estructura poliedral de la hipersuperficie tropical y como esta induce sobre  $\mathbb{R}^n$  una partición del espacio en componentes conexas que, más adelante, llamaremos *regiones de demanda única*. La tercera sección termina con el principio más notable de este capítulo: el teorema de dualidad.

### 1.1. Preliminares

**Definición 1.1.1.** *Un subconjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  se llama **convexo** si  $\forall x, y \in X$  y  $\forall t \in [0, 1]$  se tiene  $tx + (1 - t)y \in X$ . La **envoltura convexa**  $\text{conv}(U)$  de un subconjunto no vacío  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  es el subconjunto convexo más pequeño que contiene a  $U$ . Equivalentemente, la envoltura convexa de  $U$  es el conjunto*

$$\text{conv}(U) = \left\{ \sum_{i \in U} \lambda_i u_i : u_i \in U, \lambda_i \geq 0, \sum_{i \in U} \lambda_i = 1 \right\}$$

---

<sup>1</sup>Un lector que esté familiarizado con la geometría tropical y su conexión con la geometría algebraica podría esperar la noción de *variedad tropical* en este capítulo. Sin embargo esta noción no es intrínsecamente tropical, es decir, una variedad tropical está definida mediante la *tropicalización* de una variedad algebraica y así, mediante distintas *valuaciones*, tener distintas *sombras combinatoriales* de la variedad original.

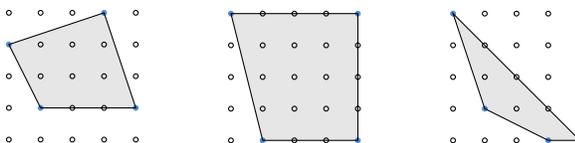


Figura 1.1: Envolturas convexas de diferentes conjuntos de puntos (en azul) simulando un geoplano visto desde *arriba*.

Una forma sencilla de ver la envoltura convexa en dos dimensiones es recordar un proyecto escolar común que está en el currículum educacional nacional. El geoplano, que se construye con una tabla, clavos y se utilizan elásticos para envolver los clavos y generar polígonos. Esta es una excelente forma de asimilar visualmente lo que es la envoltura convexa en el caso de un conjunto finito de puntos en el plano.

**Definición 1.1.2.** Sea  $X$  un subconjunto de puntos en el reticulado  $\mathbb{Z}^n$ .

1. Decimos que  $X$  es **discretamente convexo** si todos los puntos del reticulado que pertenecen a su envoltura convexa son puntos de  $X$ , esto es,

$$\text{conv}(X) \cap \mathbb{Z}^n = X.$$

2. Se define la **envoltura convexa discreta** de  $X$  como la intersección de todos los conjuntos discretamente convexos que contienen a  $X$ . Equivalentemente, la envoltura convexa discreta de  $X$  es

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(X) = \text{conv}(X) \cap \mathbb{Z}^n.$$

**Ejemplo 1.1.1.** En la figura 1.2 se presentan cuatro subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ . Luego (a) es un subconjunto que no es convexo ni discretamente convexo; (b) es subconjunto convexo mas no discretamente convexo; (c) no es subconjunto convexo ni discretamente convexo; (d) es subconjunto convexo y discretamente convexo.

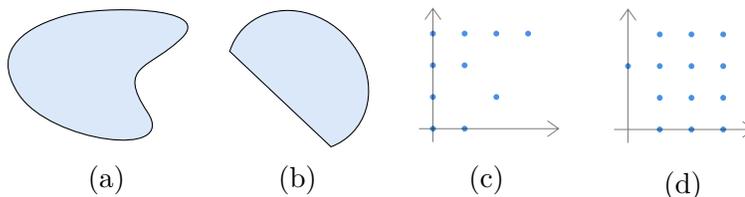


Figura 1.2: Ejemplos y no ejemplos de subconjuntos convexos y discretamente convexos.

A continuación veremos la extensión del concepto de convexidad a funciones. Para esto introduciremos las nociones de *epigrafo* e *hipografo* y definiremos convexidad de funciones en término de estas nociones.

**Definición 1.1.3.** Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  conjunto convexo. Dado  $u : C \rightarrow \mathbb{R}$ . Su **epigrafo** es

$$\text{epi}(u) = \{(x, y) \in C \times \mathbb{R} : u(x) \leq y\}.$$

Respectivamente se define su **hipografo** como

$$\text{hip}(u) = \{(x, y) \in C \times \mathbb{R} : u(x) \geq y\}.$$

Considere la Figura 1.4, donde, a modo de ejemplo, se muestra un hiperplano en  $\mathbb{R}^2$ . En la imagen, la región roja asociada a  $H_{y \geq a}$  es el hipografo de una función que tiene por gráfico la recta verde. Respectivamente, la región verde asociada a  $H_{y \leq a}$  es su epigrafo.

**Definición 1.1.4.** Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un subconjunto convexo en  $\mathbb{R}^n$ , y  $u : C \rightarrow \mathbb{R}$  una función con dominio  $C$ . Decimos que  $u$  es una:

1. **Función cóncava** si su hipografo es convexo, equivalentemente, si para cualquier par de puntos  $(x_1, x_2) \in C$  y para cualquier  $t \in [0, 1]$ , se cumple

$$u(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tu(x_1) + (1-t)u(x_2). \quad (1.1)$$

2. **Función convexa** si su epigrafo es convexo, equivalentemente, si para cualquier par de puntos  $(x_1, x_2) \in C$  y para cualquier  $t \in [0, 1]$ , se cumple

$$u(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tu(x_1) + (1-t)u(x_2). \quad (1.2)$$

Anteriormente definimos la envoltura convexa para conjuntos. Veamos que existe una noción similar a la de envoltura convexa para funciones.

**Definición 1.1.5.** Dado  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  y una función  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Su **envoltura convexa** es la función

$$\text{conv}(u) : \text{conv}(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\text{conv}(u)(x) = \max_{v \leq u} v(x).$$

Donde el máximo es sobre todas las funciones convexas  $v : \text{conv}(X) \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $v|_X \leq u$ .

Similarmente, su **envoltura cóncava** es la función

$$\text{conc}(u) : \text{conv}(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\text{conc}(u)(x) = \min_{v \geq u} v(x).$$

Donde el mínimo es sobre todas las funciones cóncavas  $v : \text{conv}(X) \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $v|_X \geq u$ .

Ahora vamos a definir el concepto análogo para funciones con dominio discreto.

**Definición 1.1.6.** Sea  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$  y  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Decimos que  $u$  es una:

1. **Función discretamente cóncava** si  $A$  es discretamente convexo y

$$u(x) = \text{conc}(u)(x) \quad \forall x \in A.$$

2. **Función discretamente convexa** si  $A$  es discretamente convexo y

$$u(x) = \text{conv}(u)(x) \quad \forall x \in A.$$

En general la **envoltura convexa discreta** de  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  es la función

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(u) = \text{conv}(u)|_{\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)}$$

y la **envoltura cóncava discreta** es

$$\text{conc}_{\mathbb{Z}}(u) = \text{conc}(u)|_{\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)}.$$

**Ejemplo 1.1.2.** En la figura 1.3 se presentan cinco ejemplos de funciones de variable real. La función (a) es cóncava pues su hipografo es convexo; (b) no es función cóncava ni convexa; (c) no es cóncava ni convexa pues su dominio no es convexo; (d) es función discretamente cóncava; (e) no es función discretamente cóncava ni discretamente convexa usando el mismo argumento de (c).

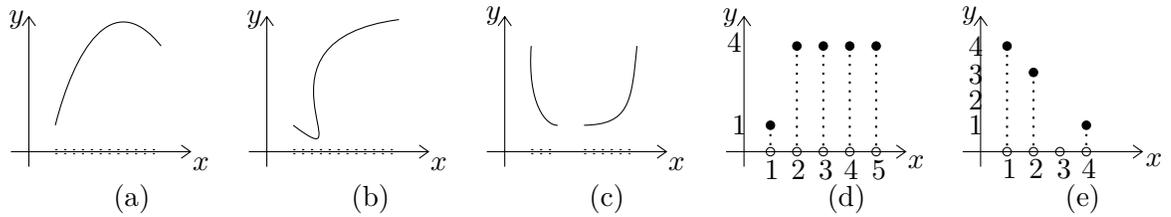


Figura 1.3: Ejemplos y no ejemplos de funciones convexas y discretamente convexas.

### 1.1.1. Complejos poliedrales

Recordemos que un **semiespacio** de  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma  $H_{y \geq a} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle \geq a\}$  con  $y \in \mathbb{R}^n$  y  $a \in \mathbb{R}$  (la expresión anterior puede usar la desigualdad en el otro sentido para dar lugar a  $H_{y \leq a}$ ). Si  $y \in \mathbb{Q}^n$  diremos que el semiespacio  $H_{y \geq a}$  es un **semiespacio racional**<sup>2</sup>. Definimos un **hiperplano** de  $\mathbb{R}^n$  como la intersección de los semiespacios  $H_{y \geq a}$  y  $H_{y \leq a}$ , lo que se traduce en  $H_{y=a} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle = a\}$  y decimos que  $H_{y=a}$  es un **hiperplano racional** si  $y \in \mathbb{Q}^n$ .

Dado  $H_{y=a}$ , un hiperplano en  $\mathbb{R}^n$ , el semiespacio  $H_{y \geq a}$  estará dado por el conjunto asociado a la orientación del vector  $y \in \mathbb{R}^n$  normal a  $H_{y=a}$ . Consideremos un ejemplo en  $\mathbb{R}^2$ . En la figura 1.4 puede apreciar un ejemplo 2-dimensional de un hiperplano (recta verde) definido por intersección de los dos semiespacios coloreados que vemos.

<sup>2</sup>Utilizaremos sin ambigüedad el término *semiespacio racional* para este documento, mas note que aquí abusamos de la notación, dado que no imponemos que  $a$  sea racional. Lo mismo para hiperplano racional.

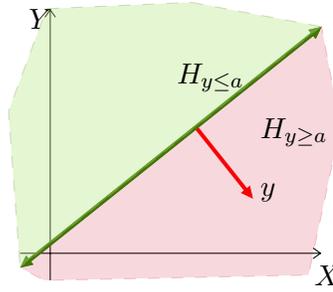


Figura 1.4: Ejemplo de un hiperplano descrito por la recta verde en  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 1.1.7.**

1. Llamamos **poliedro** en  $\mathbb{R}^n$  a la intersección no vacía de un conjunto finito de semiespacios en  $\mathbb{R}^n$ . Decimos que un poliedro  $P$  es un **politopo** si es acotado.
2. Diremos que es un **politopo reticulado** si es la envoltura convexa de un conjunto finito en  $\mathbb{Z}^n$ .

El siguiente resultado nos da una definición equivalente para la noción de politopo. Para revisar su prueba puede revisar [Ziegler \(2012\)](#) [Theorem 1.1].

**Teorema 1.1.1.** *Un conjunto  $P$  es un politopo si y solo si existen elementos  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$  tales que  $P = \text{conv}(x_1, \dots, x_r)$ .*

Podemos ver también un politopo como la envoltura convexa de un conjunto finito de puntos. Si  $U = \{u_1, \dots, u_r\}$  es finito, entonces el conjunto

$$\text{conv}(U) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i : u_i \in U, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \right\}$$

es un politopo.

Si  $P$  es un poliedro en  $\mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^n$  es un elemento para cual el funcional  $\langle y, \cdot \rangle$  está acotado en  $P$ . La **cara de  $P$  respecto a  $y$**  es el subconjunto de  $P$  donde se minimiza la forma lineal  $\langle y, \cdot \rangle$ . Equivalentemente, la cara de  $P$  con respecto a  $y$  es

$$\text{cara}_y(P) := \{u \in P : \langle y, u \rangle \leq \langle y, v \rangle \forall v \in P\}. \quad (1.3)$$

Notemos que una cara de  $P$  tiene la forma  $P \cap H_{y=a}$ , entonces es una intersección de semiespacios y, por lo tanto, un poliedro en  $\mathbb{R}^n$ . La siguiente proposición resume ciertos resultados elementales sobre las caras. Para su fundamento vea el capítulo 2 de [Ziegler \(2012\)](#).

**Proposición 1.1.1.**

1. Una intersección no vacía de caras de un poliedro  $P$  es una cara de  $P$ .
2. Si  $F$  es una cara de  $G$ , y  $G$  es una cara de  $P$ , entonces  $F$  es una cara de  $P$ .

3. Consideremos un poliedro escrito en la forma

$$P = H_{y_1 \geq a_1} \cap \cdots \cap H_{y_r \geq a_r}.$$

Entonces, toda cara de  $P$  se puede obtener reemplazando algunos de los semiespacios  $H_{y_1 \geq a_1}$  de la ecuación por los hiperplanos  $H_{y_1 = a_1}$ .

4. Consideremos un politopo de la forma

$$P = \text{conv}(x_1, \dots, x_r).$$

Entonces, toda cara es de la forma  $\text{conv}(X)$  para algún  $X \subseteq \{x_1, \dots, x_r\}$ .

Un semiespacio es un conjunto cerrado según la topología usual de  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto, una cara, al ser intersección de conjuntos cerrados, es cerrada en  $\mathbb{R}^n$ . Topológicamente no siempre existen puntos interiores en una cara de un poliedro, puesto que, dado  $v \in \text{cara}_v(P)$  con  $P$  un poliedro en  $\mathbb{R}^n$ , no existe una bola centrada en  $v$  y radio  $\varepsilon > 0$ ,  $B(v; \varepsilon)$ , tal que  $B(v; \varepsilon) \subseteq \text{cara}_v(P)$ . Para una ilustración, considere una cara que consiste en un segmento de línea, en otras palabras, una arista de un poliedro en  $\mathbb{R}^2$  como vemos en la Figura 1.5. Para todo  $\varepsilon > 0$  esta bola no está contenida en la arista. Es por esto que no podremos hablar de interior topológico de una cara e introducimos la noción de *interior relativo*, que nos asegurará un subconjunto caracterizado por los puntos dentro de la cara. Preliminarmente recordemos que un **subespacio afín** de  $\mathbb{R}^n$  es un subconjunto de la forma  $E + v$  donde  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$  y  $v \in \mathbb{R}^n$ , es decir, es una traslación de un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$ . Luego decimos que el **subespacio afín generado** de un poliedro  $P$  como el espacio afín más pequeño que contiene a  $P$ .

**Definición 1.1.8.** Sea  $P$  un politopo en  $\mathbb{R}^n$ . El **interior relativo** de  $P$ , denotado por  $\text{intrel}(P)$ , es el interior de  $P$  visto como un subconjunto del subespacio afín generado por  $P$  con la topología inducida.

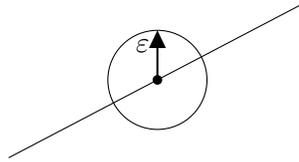


Figura 1.5: Bola de centro un punto cualquiera dentro de la cara consistente en un segmento de línea y radio  $\varepsilon$ .

**Definición 1.1.9.** Un **complejo poliedral** en  $\mathbb{R}^n$  es una familia  $\Sigma$  de poliedros en  $\mathbb{R}^n$  tales que:

1. Si  $F$  es una cara de  $P$  y  $P$  pertenece a  $\Sigma$  entonces  $F$  pertenece a  $\Sigma$ .
2. Dados  $P, Q \in \Sigma$ , entonces la intersección no vacía  $P \cap Q$  es una cara tanto de  $P$  como de  $Q$ .

El **soporte** de un complejo  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$  es  $|\Sigma| = \bigcup_{F \in \Sigma} F$  y nos referiremos a los elementos de  $\Sigma$  como caras o células indistintamente. Una **faceta** es una cara maximal del complejo poliedral. La **dimensión** de un complejo poliedral es la máxima dimensión de una de sus caras. Un complejo poliedral se dice de **dimensión pura** si todas sus facetas tienen la misma dimensión. Dado un entero  $k$ , el  **$k$ -esqueleto** de  $\Sigma$  de un complejo poliedral es el complejo poliedral que se obtiene quitando todas las caras de dimensión mayor a  $k$  de  $\Sigma$ .



Figura 1.6: Objetos geometricos, (a) y (b) en  $\mathbb{R}^2$ , que poseen estructura de complejo poliedral.

**Definición 1.1.10.** *Todo poliedro induce un complejo poliedral formado sus caras. Los complejos poliedrales en la Figura 1.6 son, por definición, una colección de poliedros en  $\mathbb{R}^2$ . (a) es la colección de poliedros que consiste en las caras  $\{v, r_1, \dots, r_4\}$ . (b) es la colección de poliedros que consiste en las caras  $\{v_1, \dots, v_5, a_1, \dots, a_5\}$ , notemos que este complejo poliedral corresponde al 1-esqueleto del pentagono  $\text{conv}(v_1, \dots, v_5)$ .*

Dado cualquier espacio vectorial  $E$ , un subconjunto,  $C \subseteq E$ , se llama **cono** ssi  $C$  es cerrado bajo combinaciones lineales no negativas, esto es, combinaciones lineales de la forma

$$\sum_{i \in \Lambda} \lambda_i v_i \quad \text{con} \quad v_i \in C \quad \text{y} \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in \Lambda.$$

Donde  $\Lambda$  posee un soporte finito ( $\lambda_i = 0$  salvo para un número finito  $i \in \Lambda$ ).

Dado cualquier conjunto de vectores,  $S$ , el **cono generado** por  $S$ , o envoltura positiva de  $S$ , denotado por  $\text{cono}(S)$ , es el conjunto de todas las combinaciones lineales no negativas de vectores en  $S$ , esto es,

$$\text{cono}(S) = \left\{ \sum_{i \in \Lambda} \lambda_i v_i \quad : \quad v_i \in S, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Cuando  $S$  consiste de un número finito de vectores, el cono,  $\text{cono}(S)$ , es llamado **cono poliedral** o **cono finitamente generado**. Diremos que un **abanico** es una colección de conos que satisface dos condiciones: cada cara de un cono en el abanico está en el abanico, y la intersección de dos conos cualesquiera en el abanico es una cara de cada uno. En la Figura 1.6 tenemos que (a) es un abanico y (b) no lo es. A continuación definiremos complejos poliedrales donde caras tienen un número natural asociado a ellas y definirán una ponderación sobre ellas mismas.

**Definición 1.1.11.** Un **Complejo poliedral con pesos** es un complejo poliedral  $\Sigma$  con un peso  $\omega_\sigma \in \mathbb{N}$  para todo  $\sigma \in \Sigma$  máximo dimensional.

**Definición 1.1.12.** Diremos que un vector  $x \in \mathbb{Z}^n$  es **primitivo** si es el primer punto reticulado que encontramos en el rayo  $\text{cono}(x)$ . En otras palabras, no existe otro elemento  $y \in \mathbb{Z}^n$  tal que  $ay = x$  para algún  $a \in \mathbb{R}$  positivo.

Dada una cara  $\sigma$  de un complejo poliedral  $\Sigma$ , y una cara  $\tau$  de dimensión uno menos que la de  $\sigma$ . En lo siguiente describiremos como encontrar el vector primitivo en  $\sigma$  ortogonal a  $\tau$  como se ilustra en la Figura 1.7 (c).

En la Figura 1.7 (a) hemos dibujado nuestro complejo poliedral con caras  $\sigma$  y  $\tau$ . Dado un punto fijo en  $\tau$ , denotemos por  $\tau^\perp$  el conjunto de todos los vectores cuyo origen está en dicho punto y cuya cabeza está contenida en  $\sigma$ . Como  $\tau$  tiene dimensión uno menos que  $\sigma$ ,  $\tau^\perp$  forma un cono de dimensión como se ilustra en la Figura 1.7 (b), el vector primitivo en  $\sigma$  es ortogonal a  $\tau$  será el vector  $x$  primitivo en dicho cono. Notemos que  $x$  es independiente del punto original que fijemos en  $\tau$ .

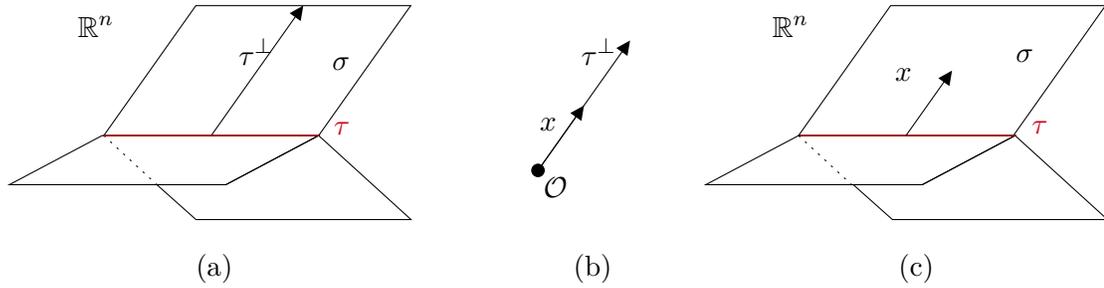


Figura 1.7: Vector primitivo  $x$  asociado a una cara  $\sigma$  en un complejo  $(n - 1)$ -dimensional.

**Definición 1.1.13.** Sean  $\Sigma$  un complejo poliedral  $d$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\tau \in \Sigma$  una cara de  $\dim(\tau) = d - 1$  y  $\omega_\sigma \in \mathbb{N}$  un peso para sus facetas. Decimos que  $\Sigma$  satisface la **condición de balance** en  $\tau$  si satisface la igualdad

$$\sum_{\sigma \supset \tau} \omega_\sigma x_\sigma = 0. \quad (1.4)$$

donde la suma va por sobre todas las facetas  $\sigma$  conteniendo a  $\tau$  y  $x_\sigma$  representa el vector primitivo a  $\sigma$  ortogonal a  $\tau$ . Finalmente, decimos que  $\Sigma$  es un **complejo poliedral balanceado** si satisface la condición de balance en  $\tau$  para toda cara  $\tau$  con dimensión  $d - 1$ .

En la Figura 1.8 se puede ver una ilustración de lo que sucede en un complejo poliedral con pesos. Si tenemos que  $x_1\omega_1 + \dots + x_4\omega_4 = 0$  tenemos que es un complejo poliedral balanceado. La condición de balance a veces es llamada *condición de cero tensión*. Considere un juego donde 4 personas sujetan de los rayos de la Figura 1.8 y aplican fuerza de magnitud  $\omega_i$  en las direcciones  $x_i$ , si el centro no se mueve estaríamos en presencia de un juego que modela un complejo poliedral balanceado.

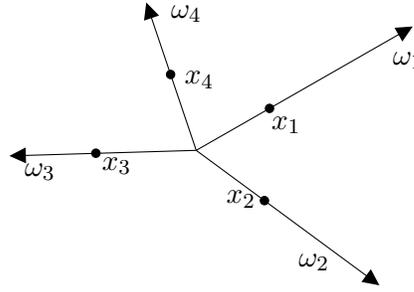


Figura 1.8: Complejo poliedral con pesos  $\omega_i$  y vectores primitivos  $x_i$  asociados a sus facetas. Con  $i = 1, \dots, 4$ .

### 1.1.2. Subdivisiones regulares

Una clase particularmente interesante de complejos poliedrales son las subdivisiones de un politopo.

**Definición 1.1.14.** Sea  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  un poliedro. Una **subdivisión** de  $P$  es un complejo poliedral  $\Sigma$  con soporte  $P$ . En otras palabras, una subdivisión de un politopo  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  es una colección finita  $\Delta$  de politopos en  $\mathbb{R}^n$  que satisfacen las siguientes condiciones

- $P = \bigcup_{Q \in \Delta} Q$ .
- Para cualquier par  $Q_1, Q_2 \in \Delta$ , si la intersección  $Q_1 \cap Q_2$  es no vacía, entonces esta intersección es una cara en común de  $Q_1$  y  $Q_2$ .

Nuestro interés está en una clase particular de subdivisiones para politopos reticulados, las que reciben el nombre *subdivisiones regulares*. Para la subdivisión regular de un politopo reticulado  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  debemos tener en cuenta un conjunto de puntos reticulados  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$  tales que  $\text{conv}(A) = P$ . El anterior conjunto lo dotamos con una *función altura*  $u : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ .

Para calcular la subdivisión de un politopo desde la función altura se utiliza el siguiente proceso:

1. Usando la función altura, consideramos el poliedro levantado  $P^u$  definido por

$$P^u := \text{conv}((x, u(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in A). \quad (1.5)$$

El siguiente resultado nos da una definición equivalente para la noción de politopo. Para su prueba puede revisar El conjunto  $P^u$  es un poliedro. Una cara o cara superior de  $P^u$  es una cara que posee de soporte un hiperplano no vertical  $H$  y con  $P^u$  bajo  $H$  y  $H \cap P^u \neq \emptyset$ . Equivalentemente son las cara acotadas de  $P^u$ . A la unión de estas caras superiores le decimos **techo**.

2. Las caras superiores, dado que no son verticales, se proyectan biyectivamente a politopos dentro de  $P$ . Las proyecciones de estas caras son politopos contenidos en  $P$ . Esta familia de politopos forma la subdivisión regular de  $P$  con respecto  $u$ .

**Definición 1.1.15.** Una subdivisión de un politopo  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  se llama **subdivisión regular** si se puede obtener a través de la construcción arriba para alguna función altura  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$

Considere el siguiente ejemplo, a modo ilustrativo, para revisar el cómo se realiza el proceso anteriormente descrito.

**Ejemplo 1.1.3.** Considere el subconjunto  $A \subseteq \mathbb{Z}^2$  definido por

$$A = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 1)\}.$$

El subconjunto anterior induce el polígono reticulado  $P = \text{conv}(A)$  que vemos en la Figura 1.9 (a). Consideremos a continuación la función altura  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{array}{lll} u(0,0)=1 & u(0,1)=1 & u(2,1)=2 \\ u(1,0)=1 & u(0,2)=1 & u(1,1)=2. \\ u(2,0)=1 & u(0,3)=1 & \\ u(3,0)=1 & u(1,2)=2 & \end{array}$$

A continuación, mediante el proceso descrito arriba, calculamos la subdivisión regular de la envoltura convexa de  $A$  inducida por la función altura  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ . La función altura asociada a cada punto de  $A$  induce un levantamiento de estos puntos, como se ve en la Figura 1.9 (b).

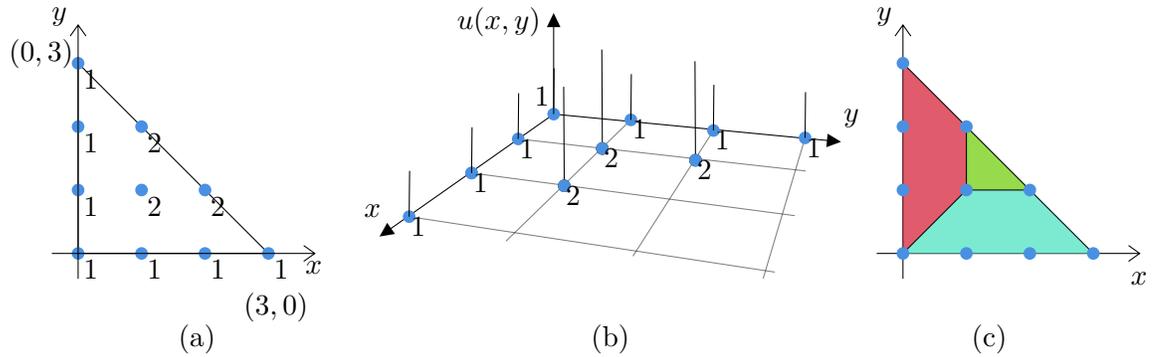


Figura 1.9: Ejemplo de una subdivisión regular.

Luego, las caras superiores de la envoltura convexa del poliedro levantado,  $\text{conv}(P^u)$ , definen el techo, este se proyecta al plano  $xy$ , donde queda definida la subdivisión regular, como vemos en la Figura 1.10. Luego la subdivisión regular es la que vemos en la Figura 1.9 Note que el soporte de la subdivisión de un politopo es el politopo inicial, en particular para este ejemplo es un polígono. Este polígono, como veremos más adelante, recibirá en el contexto tropical el nombre de polígono de Newton. Respectivamente politopo para dimensiones mayores.

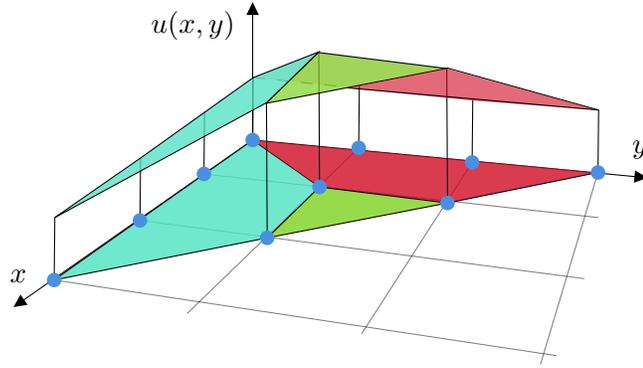


Figura 1.10: Ejemplo de la proyección de las caras superiores de  $P^u$  que definen la subdivisión regular.

## 1.2. Geometría tropical

Redefinimos la aritmética sobre los números reales con la **suma tropical**  $\oplus$  y **multiplicación tropical**  $\odot$ , donde para  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  tenemos

$$a \oplus b := \max\{a, b\} \quad \text{y} \quad a \odot b := a + b.$$

Definimos  $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$  como el sistema numérico consistente en los números reales equipados de un elemento  $-\infty$  que posee la propiedad de ser menor que cualquier número real, junto con la suma tropical y el producto tropical.

**Proposición 1.2.1.**  $\mathbb{T}$  es un semianillo.

*Demostración.*

1. La suma:

- es asociativa, esto es,  $\forall a, b, c \in \mathbb{T}, \quad (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ .
- posee un elemento neutro, esto es,  $\exists 0_{\mathbb{T}} = -\infty$ , tal que,  $\forall a \in \mathbb{T}, \quad 0_{\mathbb{T}} \oplus a = a \oplus 0_{\mathbb{T}} = a$ .
- es conmutativa, esto es,  $\forall a, b \in \mathbb{T}, \quad a \oplus b = b \oplus a$ .

2. La multiplicación:

- es asociativa, esto es,  $\forall a, b, c \in \mathbb{T}, \quad a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ .
- posee un elemento neutro, esto es,  $\exists 1_{\mathbb{T}} = 0$ , tal que,  $\forall a \in \mathbb{T}, \quad 1_{\mathbb{T}} \odot a = a \odot 1_{\mathbb{T}}$ .
- es conmutativa, esto es,  $\forall a, b \in \mathbb{T}, \quad a \odot b = b \odot a$ .

3. La suma es distributiva en relación con la multiplicación, esto es

$$\forall a, b, c \in \mathbb{T}, \quad a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c \quad \text{y} \quad (a \oplus b) \odot c = a \odot c \oplus b \odot c.$$

4.  $0_{\mathbb{T}}$  es el elemento absorbente respecto a la multiplicación, esto es,

$$\forall a \in \mathbb{T}, \quad a \odot -\infty = -\infty \odot a = -\infty.$$

Notemos que la estructura algebraica que posee el sistema  $\mathbb{T}$  recibe el nombre de semianillo por el hecho de satisfacer las condiciones para ser un anillo excluyendo la de poseer un inverso aditivo, esto es,  $\forall a \in \mathbb{T}$  no necesariamente existe elemento  $(-a)_{\oplus}$  en  $\mathbb{T}$ , llamado inverso aditivo, tal que  $a \oplus (-a)_{\oplus} = 0_{\mathbb{T}}$ . Una expresión en  $\mathbb{T}$  se identifica por las operaciones  $\oplus$  y  $\odot$ , pero en la literatura tropical también es usual enmarcar la expresión en comillas dobles para enunciar que pertenece a  $\mathbb{T}$ . Por ejemplo

$$x_1 \oplus x_2 \oplus 3 \odot x_3^4 = "x_1 + x_2 + 3x_3^4" = \text{máx}\{x_1, x_2, 3 + 4x_3\} \quad (1.6)$$

Vale la pena observar que el coeficiente de la expresión anterior, para  $x_1$  y  $x_2$ , es 0, pues es el elemento neutro multiplicativo en  $\mathbb{T}$ . Note que la expresión anterior es la misma si sumamos  $-\infty$ , pues es el elemento neutro aditivo en  $\mathbb{T}$ . Luego 1.6 es equivalente a escribir

$$(0 \odot x_1) \oplus (0 \odot x_2) \oplus (3 \odot x_3^4) \oplus -\infty = \text{máx}\{x_1 + 0, x_2 + 0, 3 + 4x_3, -\infty\} = \text{máx}\{x_1, x_2, 3 + 4x_3\}$$

Un polinomio tradicional en  $n$  variables sobre  $\mathbb{R}$  es una suma de monomios, cada uno de los cuales consiste en un coeficiente de  $\mathbb{R}$  multiplicado por algún producto de esas variables (posiblemente un producto vacío; posiblemente con repeticiones). El área de la matemática que estudia el conjunto de puntos donde estos polinomios se anulan, y su correspondiente geometría en  $\mathbb{R}^n$  se conoce como la geometría algebraica real. Veremos que un polinomio tropical es algo distinto a un polinomio en geometría algebraica real. A continuación definiremos los polinomios tropicales y como se anulan. Así la **geometría tropical** es el área de la matemática que estudia el conjunto de puntos donde se anulan los polinomios tropicales y su correspondiente geometría en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.2.1.** *Definimos un polinomio tropical (de Laurent) con soporte  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$  como*

$$f := \bigoplus_{m \in A} c_m \odot x^m \in \mathbb{T}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}].$$

El soporte  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$  es el conjunto de todos los  $m \in \mathbb{Z}^n$  tal que un término de la forma  $c_m \odot x^m$  aparece en  $f$  con  $c_m \neq -\infty$ . En la definición 1.2.1 las variables  $x_1, \dots, x_n$  deben ser consideradas como símbolos y la adición y multiplicación de ellas como meras operaciones formales, al igual que en el caso de polinomios en geometría algebraica real. Un polinomio tropical, debido a la aritmética de la cual está dotado el semianillo  $\mathbb{T}$ , induce una función tropical  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \text{máx}_{m \in A} \{c_m + \langle m, x \rangle\} \end{aligned}$$

Esta función es importante para entender el polinomio tropical pero notemos, como veremos en el siguiente ejemplo, que no lo caracteriza. En otras palabras, el polinomio  $p \in \mathbb{T}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$  contiene más información que su gráfico.

**Ejemplo 1.2.1.** Consideremos el polinomio tropical  $p(x) = x^3 \oplus 3 \odot x \oplus 0$ , el cual induce la función tropical  $p(x) = \max\{3x, 3 + x, 0\}$ . Función que tiene por gráfico la línea azul en la Figura 1.11. El polinomio tropical nos entrega más información que la función inducida por el mismo. El gráfico anterior puede provenir de múltiples polinomios, por ejemplo, el polinomio  $p(x) = x^3 \oplus Ax^2 \oplus 3 \odot x \oplus 0$ , con  $r < 2$ , induce la misma función tropical  $p(x) = \max\{3x, 3 + x, 0\} = \max\{3x, 2x, 3 + x, 0\}$ .

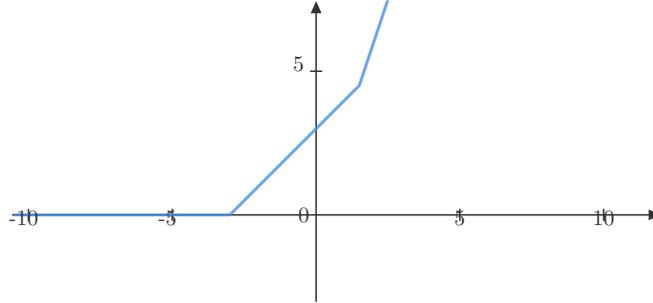


Figura 1.11: Gráfico de  $p(x)$ .

Dada una función  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , el polinomio tropical inducido por esta función, denotada por  $f_u$ , es

$$f_u = \bigoplus_{a \in A} u(a) \odot x^a. \quad (1.7)$$

Esto es, usamos  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$  para representar los coeficientes de los monomios con exponentes  $a \in A$ . Trabajaremos con polinomios tropical bajo esta notación ya que nos facilitará las traducciones al contexto económico.

Decimos que un polinomio tropical  $f(x_1, \dots, x_n)$  se anula en el punto  $(a_1, \dots, a_n)$  si el máximo en  $f(a_1, \dots, a_n)$  se alcanza al menos dos veces. Si  $f(x)$  es un polinomio tropical que se anula en  $a$ , decimos que  $a$  es un cero de  $f(x)$ .

**Definición 1.2.2.** Sea  $f_u(x)$  un polinomio tropical. La **hipersuperficie tropical** de  $f_u(x)$  es el conjunto de ceros de  $f_u(x)$ , es decir,

$$\mathcal{T}(f_u) := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{El máximo en } f_u(x) \text{ se alcanza al menos dos veces}\}. \quad (1.8)$$

Equivalentemente la hipersuperficie tropical  $\mathcal{T}(f)$  del polinomio tropical  $f_u = \bigoplus_{a \in A} u(a) \odot x^a$  con soporte finito  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$  es definida por los  $x \in \mathbb{R}^n$  tales que el conjunto

$$D_u(x) := \operatorname{argmax}\{u(a) + \langle a, x \rangle : a \in A\} \quad (1.9)$$

posee cardinalidad mayor o igual a 2. Luego podemos reescribir (1.8) como

$$\mathcal{T}(f_u) = \{x \in \mathbb{R}^n : |D_u(x)| \geq 2\} \quad (1.10)$$

Considere a continuación el siguiente ejemplo en el espacio afín  $\mathbb{R}^2$ . Este explica el cálculo de una hipersuperficie tropical asociada a un polinomio tropical de dos variables.

**Ejemplo 1.2.2.** Sea  $f \in \mathbb{T}[x^\pm, y^\pm]$  definido de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x \oplus y \oplus 0 \\ &= \text{máx}(x, y, 0). \end{aligned}$$

Encontremos  $\mathcal{T}(f)$  descrito por el siguiente subconjunto

$$\{(x = y) \wedge (x \geq 0)\} \cup \{(x = 0) \wedge (x \geq y)\} \cup \{(y = 0) \wedge (y \geq x)\}.$$

Lo anterior es la unión de todos los casos donde  $f(x, y)$  se maximiza a lo menos dos veces. En la Figura 1.12 vemos la hipersuperficie tropical inducida por  $f(x, y)$ . Cada punto  $(x, y) \in \mathcal{T}(f)$  es un cero tropical de  $f(x, y)$ .

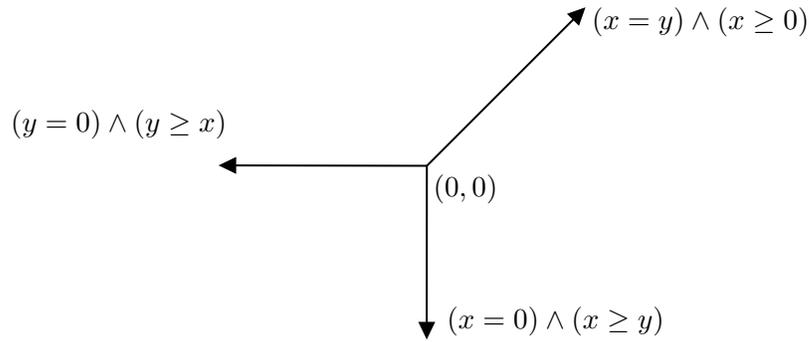


Figura 1.12: El conjunto  $\mathcal{T}(f)$  inducido por  $f(x, y)$

El ejemplo arriba es el cálculo de  $\mathcal{T}(f)$  manualmente. En el resto del trabajo utilizaremos la herramienta `polymake`. El cual mediante funciones de su librería `tropical`, nos regresa la hipersuperficie del polinomio tropical que ingresemos. Usted puede revisar [A](#) para ver una introducción superficial sobre `polymake` y cómo obtener hipersuperficies tropicales inducidas por polinomios tropicales. En [A](#) puede encontrar los códigos de entrada, es decir, usted podrá programar las hipersuperficies tal cual las ve en este documento. Además `polymake` permite manipular el objeto geométrico como rotarlo, la opción de ocultar o visualizar sus caras, entre otras opciones. Luego usted podrá manipular todas las figuras de este documento que están hechas con `polymake`. A continuación veremos un ejemplo de los objetos geométricos que el programa entrega al ingresar polinomios.

**Ejemplo 1.2.3.** Considere los siguientes polinomios tropicales

(a)  $p_1 \in \mathbb{T}[x^\pm, y^\pm]$  definido por

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= (0 \odot x^3 y^3) \oplus (0 \odot x^2 y^3) \oplus (0 \odot x^3 y^2) \oplus (0 \odot xy^3) \oplus (1 \odot x^2 y^2) \\ &\oplus (0 \odot x^3 y) \oplus (0 \odot x^3) \oplus (1 \odot x^2 y) \oplus (1 \odot xy^2) \oplus (0 \odot y^3) \oplus (0 \odot x^2) \\ &\oplus (1 \odot xy) \oplus (0 \odot y^2) \oplus (0 \odot x) \oplus (0 \odot y) \oplus 0 \end{aligned}$$

(b)  $p_2 \in \mathbb{T}[x^\pm, y^\pm]$  definido por

$$\begin{aligned} p_2(x, y) = & (0 \odot x^3 y^3) \oplus (3 \odot x^2 y^3) \oplus (3 \odot x^3 y^2) \oplus (2 \odot x^4 y^3) \oplus (3 \odot x^2 y^2) \\ & \oplus (2 \odot x^3 y) \oplus (0 \odot x^3) \oplus (2 \odot x^2 y) \oplus (2 \odot x y^2) \oplus (0 \odot y^3) \\ & \oplus (2 \odot x^2) \oplus (3 \odot x y) \oplus (2 \odot y^2) \oplus (3 \odot x) \oplus (3 \odot y) \oplus 0 \end{aligned}$$

Note que los monomios de  $p_2$  y  $p_1$  son los mismos. Cambian los coeficientes.

(c)  $p_3 \in \mathbb{T}[x^\pm, y^\pm]$  definido por

$$p_3(x, y) = p_1 \odot p_2$$

Geoméricamente, la hipersuperficie de un polinomio tropical  $p = p_1 \odot \dots \odot p_n$  es la unión de las hipersuperficies tropicales asociadas respectivamente a  $p_1$  hasta  $p_n$ . En otras palabras, la hipersuperficie tropical de un producto de polinomios es la superposición de las hipersuperficies asociadas a estos polinomios. En la Figura 1.13(c) puede ver como la hipersuperficie asociada a  $p_3 = p_1 \odot p_2$  es la unión las hipersuperficies de la Figura 1.13(a) y Figura 1.13(b).

(d)  $p_4 \in \mathbb{T}[x^\pm, y^\pm]$  definido por

$$\begin{aligned} p_4(x, y) = & (2) \oplus (4 \odot x) \oplus (3 \odot x^2) \oplus (5 \odot x^3) \oplus (7 \odot x^4) \oplus (6 \odot x^5) \oplus (8 \odot x^6) \\ & \oplus (10 \odot x^7) \oplus (8 \odot x^8) \oplus (9 \odot y) \oplus (10 \odot y^2) \oplus (8 \odot y^3) \oplus (7 \odot y^4) \oplus (5 \odot y^5) \\ & \oplus (6 \odot y^6) \oplus (3 \odot y^7) \oplus (4 \odot y^8) \oplus (15 \odot x^4 y^4) \end{aligned}$$

Notemos que el grado del polinomio no representa un problema para encontrar el lugar geométrico de sus ceros.  $p_4$  es un polinomio de dos variables de grado 8, cosa que en la geometría algebraica convencional representaría un problema.

(e)  $p_5 \in \mathbb{T}[x^\pm, y^\pm, z^\pm]$  definido por

$$p_5(x, y, z) = (1 \odot x) \oplus (1 \odot y) \oplus (1 \odot z) \oplus 1$$

(f)  $p_6 \in \mathbb{T}[x^\pm, y^\pm, z^\pm]$  definido por

$$p_6(x, y, z) = 6 \oplus (5 \odot x) \oplus (4 \odot y) \oplus (3 \odot z) \oplus (3 \odot x^2) \oplus (2 \odot y^2) \oplus (1 \odot z^2)$$

A continuación veamos las seis hipersuperficies tropicales inducidas por los seis polinomios del ejemplo.

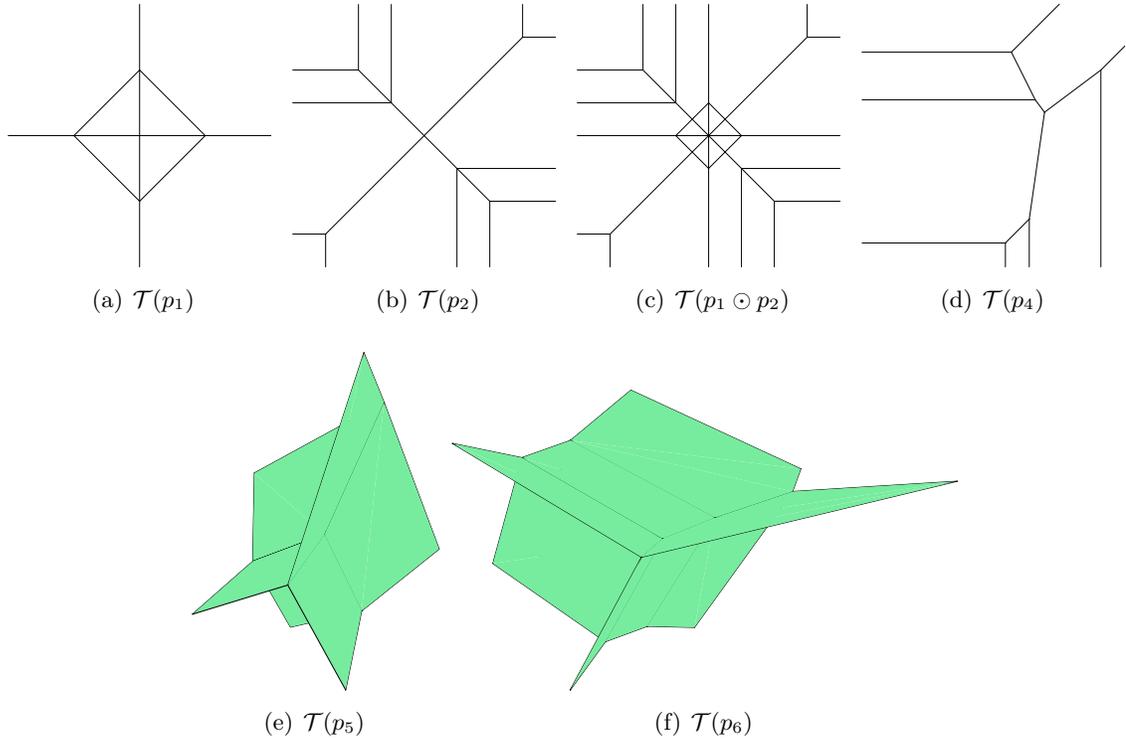


Figura 1.13: Ejemplos de hipersuperficies tropicales.

Terminaremos esta sección dando una prueba del *Teorema de estructura* de hipersuperficies tropicales que nos dice que toda hipersuperficie tropical posee de forma natural una estructura de complejo poliedral e induce una subdivisión de  $\mathbb{R}^n$  conocida el *complejo de Gröbner*.

**Definición 1.2.3.** Sea  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Dado un subconjunto  $X = \{a_1, \dots, a_k\} \subseteq A$ , definimos el conjunto

$$\begin{aligned} C(X) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : a_1, \dots, a_k \in D_u(x)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : X \subseteq D_u(x)\}. \end{aligned}$$

en otras palabras,  $C(X)$  es el conjunto de todos los  $x \in \mathbb{R}^n$  para los cuales el máximo  $\max_{a \in A} \{u(x) - \langle a, x \rangle\}$  es alcanzado al menos en  $a_1, \dots, a_k$ .

2. Denotamos por  $GC(f_u)$  a la familia  $\{C(X) : X \subseteq A, X \neq \emptyset\}$ , el cual llamamos **complejo de Gröbner** de  $f_u$  (o inducida por  $u$ ). La dimensión de un complejo poliedral es la mayor dimensión de una de sus caras.

Veamos a continuación que un complejo de Gröbner inducido por una función  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es un complejo poliedral racional  $n$ -dimensional y posee, como definen, un  $(n - 1)$ -esqueleto  $\mathcal{T}(f_u)$  el cual es un  $(n - 1)$ -complejo poliedral racional.

**Teorema 1.2.1** (Estructura). Sea  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 1. El complejo de Gröbner

$$\text{CG}(f_u) = \{C(X) \mid X \subseteq A\}$$

forma un complejo poliedral con soporte  $\mathbb{R}^n$ .

## 2. La familia

$$\Sigma = \{C(X) \mid X \subseteq A \text{ tal que } \#X \geq 2\}$$

forma un complejo poliedral  $(n-1)$ -dimensional con soporte  $\mathcal{T}(f_u)$ .  $\Sigma$  corresponde al  $n-1$  esqueleto de  $\text{CG}(f_u)$

**Demostración.**

1.  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$  es finito. Esto implica que  $\text{CG}(f_u)$  es una familia finita. Veamos que esta familia esta conformada por poliedros. Para esto notemos que  $u(x) - \langle a, x \rangle$  alcanza el maximo al menos en los elementos de  $X$  ssi para todo  $a \in X$  y todo  $b \in A$  tenemos

$$u(x) - \langle a, x \rangle \geq u(x) - \langle a, x \rangle \quad (1.11)$$

de esta forma

$$C(X) = \bigcap_{\substack{a \in X \\ b \in A}} \{\langle x, a - b \rangle \geq u(a) - u(b)\} \quad (1.12)$$

por lo que  $C(X)$  es un poliedro racional, ya que cada ecuación tiene coeficientes enteros.

Ahora, consideremos una cara de  $F$  de  $C(X)$ , por la Proposición 1.1.1, tenemos que esta cara esta dada por convertir algunas desigualdades en igualdades en (1.12). Sin embargo, si  $\langle x, a - b \rangle \geq u(a) - u(b)$  se convierte en una igualdad  $\langle x, a - b \rangle = u(a) - u(b)$  entonces  $\langle x, a \rangle + u(a) = \langle x, b \rangle + u(b)$  por lo que  $b$  alcanza el máximo. Así  $F$  se vuelve un conjunto de la forma  $C(Y)$  con  $Y$  conteniendo a  $X$  y por lo tanto pertenece a  $\text{CG}(f_u)$ . Recíprocamente, de igual forma se ve que todo conjunto de la forma  $C(Y)$  con  $Y \supseteq X$  es una cara de  $C(X)$ .

Además, notemos que  $x \in C(X) \cap C(X')$  ssi  $u(x) - \langle a, x \rangle$  alcanza el máximo al menos en  $a \in X$  y al menos en  $a \in X'$  lo que pasa ssi  $u(x) - \langle a, x \rangle$  alcanza el máximo al menos en  $X \cup X'$ , es decir,  $x \in C(X \cup X')$ . Así,  $C(X) \cup C(X') = C(X \cup X')$  es una cara tanto de  $C(X)$  como de  $C(X')$  como se vio arriba.

Así  $\text{CG}(f_u)$  forma un complejo poliedral racional. El soporte es  $\mathbb{R}^n$  ya que para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x$  pertenece a la célula  $C(D_u(x))$ .

2. Como vimos arriba, las caras de  $C(X)$  son de la forma  $C(Y)$  con  $Y \supseteq X$ , por lo tanto  $\Sigma$  es un complejo poliedral. Ahora, si  $x$  está en el soporte de  $\Sigma$ , entonces  $x \in C(X)$  para algún  $X$  con al menos dos elementos, y como  $D_u(x) \supseteq X$  entonces  $D_u(x)$  tiene al menos dos elementos por lo que  $x \in \mathcal{T}(f_u)$ . Recíprocamente, si  $x \in \mathcal{T}(f_u)$  entonces  $x \in C(D_u(x)) \subseteq |\Sigma|$ . Por lo tanto  $|\Sigma| = \mathcal{T}(f_u)$ .

Finalmente, notemos que las facetas de  $\text{CG}(f_u)$  son los conjuntos de la forma  $C(\{a\})$  con  $a \in A$ , cuando este conjunto es no vacío. Así,  $|\Sigma|$  corresponde exactamente a  $|\text{CG}(f_u)|$  con el interior relativo de sus facetas removidos. Como  $\text{CG}(f_u)$  era un complejo poliedral

$n$ -dimensional entonces  $\Sigma(f_u)$  corresponde al  $n - 1$  esqueleto de este, y así es  $n - 1$  dimensional.

□

### 1.3. Dualidad

El objetivo de esta sección es enunciar el teorema de dualidad 1.3.1. Para esto definimos preliminarmente el objeto poliedral *politopo de Newton* asociado a un polinomio tropical. Este objeto consiste en la envoltura convexa de los puntos enteros que definen los exponentes de los monomios del polinomio. Luego queremos establecer la existencia de una relación de *dualidad* existente entre una subdivisión regular del politopo de Newton y  $\text{CG}(f_u)$ , para algún  $f_u \in \mathbb{T}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$ .

**Definición 1.3.1.** Sea  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f_u \in \mathbb{T}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$  es un polinomio tropical con soporte  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ . El **politopo de Newton** de  $f_u$ , escrito  $\text{Newt}(f_u)$ , es la envoltura convexa del soporte. Esto es,

$$\text{Newt}(f_u) = \text{conv}(\{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n : x_1^{i_1} \odot \dots \odot x_n^{i_n} \text{ aparece en } f_u \text{ con } c_{i_1 \dots i_n} \neq -\infty\}).$$

Así, un polinomio  $q = (c_{m_1} \odot x^{m_1}) \oplus (c_{m_2} \odot x^{m_2}) \oplus (c_{m_3} \odot x^{m_3}) \oplus (c_{m_4} \odot x^{m_4}) \in \mathbb{T}[x_1^\pm, x_2^\pm]$  que tiene un soporte  $A_q = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$  induce un polígono (dimensión 2) de Newton que es la envoltura convexa del soporte de  $q$ .

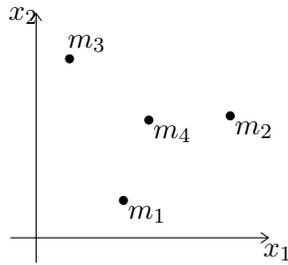


Figura 1.14: Soporte de  $q$ .

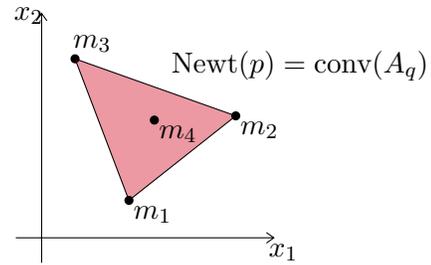


Figura 1.15: Polígono de Newton asociado a  $q$ .

El politopo de Newton de un polinomio tropical  $f_u \in \mathbb{T}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$  posee de forma natural una subdivisión inducida por los coeficientes de  $f_u$ . Esta es la subdivisión regular dada por la función altura

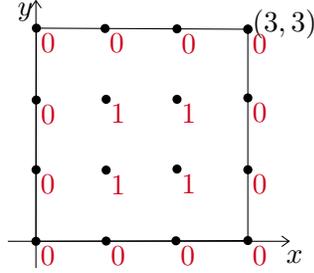
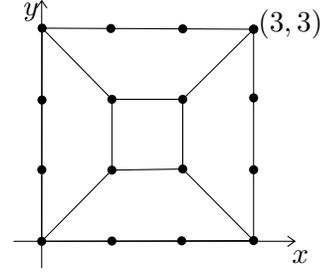
$$\begin{aligned} u : \text{Newt}(f_u) \cap \mathbb{Z}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \cup -\infty \\ m &\longmapsto c_m \end{aligned}$$

De esta manera denotamos la subdivisión regular del politopo  $\text{Newt}(f_u)$ , inducido por  $f_u \in \mathbb{T}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$  con la expresión  $\text{SNewt}(f_u)$ . Volviendo al primer inciso del Ejemplo 1.2.3 vemos la subdivisión regular,  $\text{SNewt}(p_1)$ , que induce el polinomio  $p_1$ .

**Ejemplo 1.3.1.** Sea  $p_1 \in \mathbb{T}[x^\pm, y^\pm]$  definido por

$$\begin{aligned} p_1(x, y) = & (0 \odot x^3 y^3) \oplus (0 \odot x^2 y^3) \oplus (0 \odot x^3 y^2) \oplus (0 \odot x y^3) \oplus (1 \odot x^2 y^2) \oplus (0 \odot x^3 y) \\ & \oplus (0 \odot x^3) \oplus (1 \odot x^2 y) \oplus (1 \odot x y^2) \oplus (0 \odot y^3) \oplus (0 \odot x^2) \oplus (1 \odot x y) \\ & \oplus (0 \odot y^2) \oplus (0 \odot x) \oplus (0 \odot y) \oplus 0 \end{aligned}$$

El soporte  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$  serán los exponentes de los monomios. La función altura está dada por los coeficientes de cada monomio. Por ejemplo, la altura asociada al punto  $(3, 3)$  (punto asociado al monomio  $x^3y^3$ ) es cero (ya que su coeficiente es cero). En 1.16 puede ver el soporte de  $p_1$  y el polígono de Newton que induce acompañado de la altura (en rojo) asociada a cada punto del soporte. Luego es fácil ver que la subdivisión regular de  $p_1$  inducida por sus coeficientes es la que vemos en la Figura 1.17.


 Figura 1.16:  $\text{Newt}(p_1)$ .

 Figura 1.17:  $\text{SNewt}(p_1)$ .

Enunciaremos una relación de *dualidad* que existe entre dos complejos poliedrales, la subdivisión del politopo de Newton de un polinomio tropical  $f_u$  y el complejo de Gröbner de  $f_u$ . La subdivisión regular de un politopo posee estructura de complejo poliedral por definición pero para la hipersuperficie tropical la estructura está dada por la proposición 1.2.1.

Antes de proceder a demostrar el teorema de dualidad 1.3.1 adelante, precisamos dos lemas que nos facilitaran la prueba. El primero asegura que el conjunto  $D_u(x)$  es constante en el interior relativo de una cara de  $\text{CG}(f_u)$ . Dando una nueva interpretación del complejo de Gröbner como la subdivisión de  $\mathbb{R}^n$  para la cual  $x \mapsto D_u(x)$  es constante en cada célula. El segundo lema se conoce, en el estudio de la demanda para bienes indivisibles, como el *Lema del pseudo equilibrio de precios*, enunciado por [Milgrom y Strulovici \(2009\)](#). Este nos dice, a grandes rasgos, que  $D_u(x)$  está caracterizado por su envoltura convexa  $D_u(x)$ .

**Lema 1.3.1.** *Dado un elemento  $x \in \mathbb{R}^n$ , consideremos la célula del complejo de Gröbner  $C = C(D_u(x))$ . Entonces,*

1. *El punto  $x$  pertenece al interior relativo de  $C$ .*
2. *Para todo otro  $x' \in \text{intrel}(C)$  tenemos*

$$D_u(x) = D_u(x').$$

**Demostración.**

1. Si  $x$  no pertenece al interior relativo de  $C$  entonces pertenece al interior relativo de una cara  $F \subsetneq C$ . Por el Teorema 1.2.1, tenemos que  $F = C(X)$  para algún  $X$ . Como  $x \in F$  tenemos  $X \subseteq D_u(x)$  lo que implica que

$$C = C(D_u(x)) \subseteq C(X) = F,$$

contradicción.

2. Consideremos  $C' = C(D_u(x'))$ . Notemos que por la definición de las células de Gröbner tenemos  $C = \{x' \in \mathbb{R}^n : D_u(x) \subseteq D_u(x')\}$ . Como  $x' \in C$ , esto nos da  $D_u(x) \subseteq D_u(x')$ , y así tenemos que  $C' \subseteq C$ . Por otro lado, por el Teorema 1.2.1,  $C' \cap C$  es una cara de  $C$  conteniendo a  $x'$ , como  $x'$  está en el interior relativo de  $C$  entonces  $C' \cap C = C$ , es decir  $C \subseteq C'$ , de donde  $C = C'$ . Esto implica que  $x \in C'$  y por lo tanto  $D_u(x') \subseteq D_u(x)$ , así

$$D_u(x) = D_u(x').$$

□

**Lema 1.3.2.** *Consideremos una función  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Dado  $a \in A$ , si existe un  $x \in \mathbb{R}^n$  para el cual  $a \in D_u(x)$ , entonces para todo  $x' \in \mathbb{R}^n$  tal que  $a \in \text{conv}(D_u(x'))$  se sigue que  $a \in D_u(x')$ .*

*Demostración.* Consideremos un  $a \in \text{conv}(D_u(x'))$ , entonces por la definición de la envoltura convexa existen  $\alpha_c \in [0, 1], c \in D_u(x)$  tales que

$$\sum_{c \in D_u(x')} \alpha_c c = a$$

con  $\sum_{c \in D_u(x')} \alpha_c = 1$ . Luego, tenemos la desigualdad

$$u(a) + \langle a, x' \rangle \leq f_u(x') = \sum_{c \in D_u(x')} \alpha_c (u(c) + \langle c, x' \rangle) = \left( \sum_{c \in D_u(x')} \alpha_c u(c) \right) + \langle a, x' \rangle$$

y esta desigualdad es una igualdad si y solo si  $a \in D_u(x')$ . Restando  $\langle a, x' \rangle$  a ambos lados la desigualdad es equivalente a

$$u(a) \leq \sum_{c \in D_u(x')} \alpha_c u(c). \quad (1.13)$$

Ahora, por otro lado, como  $a \in D_u(x)$  tenemos que

$$u(a) + \langle x, a \rangle \geq u(c) + \langle x, c \rangle$$

para todo  $c \in A$ . En particular para todo  $c \in D_u(x')$ , por lo tanto

$$u(a) + \langle x, a \rangle \geq \sum_{c \in D_u(x')} \alpha_c (u(c) + \langle x, c \rangle)$$

así

$$u(a) \geq \sum_{c \in D_u(x')} \alpha_c u(c).$$

Es decir, tenemos la igualdad que queríamos en (1.13) por lo que  $a \in D_u(x')$ . □

**Teorema 1.3.1** (Teorema de Dualidad). *Dada una función  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , el complejo de Gröbner  $\text{CG}(f_u)$  es dual a la subdivisión regular  $\text{SNewt}(f_u)$  en el siguiente sentido. Existe una biyección entre caras de  $\text{CG}(f_u)$  y caras de  $\text{SNewt}(f_u)$*

$$\begin{aligned} C &: \text{SNewt}(f_u) \longrightarrow \text{CG}(f_u) \\ P &\longmapsto C(P) \end{aligned}$$

que llamaremos de dualidad y satisface:

- *Revierte dimensión:* Una cara de dimensión  $k \leq n$  de  $\text{CG}(f_u)$  es dual a una cara de codimensión  $k$  de  $\text{SNewt}(f_u)$ .
- *Ortogonalidad:* Una cara en  $\text{CG}(f_u)$  es ortogonal a su cara dual en  $\text{SNewt}(f_u)$ .
- *Revierte incidencia:* Dadas células  $P$  y  $P'$  en  $\text{SNewt}(f_u)$  y sus correspondientes duales  $C(P')$  y  $C(P)$  en  $\text{CG}(f_u)$ . Entonces  $P$  es una cara de  $P'$  si y solo si  $C(P')$  es una cara de  $C(P)$ .

***Demostración.***

- *Construcción de la biyección:* Comenzaremos definiendo el mapa

$$\Lambda : \text{CG}(f_u) \longrightarrow \text{SNewt}(f_u)$$

donde para una cara  $C$  en  $\text{CG}(f_u)$  definimos

$$\Lambda(C) := \text{conv}(D_u(x))$$

para algún  $x \in \text{intrel}(C)$ .

1. El mapa está bien definido: Por el Lema 1.3.1  $\Lambda(C)$  es independiente de  $x$ . Ahora veamos que  $\text{conv}(D_u(x))$  es un elemento de  $\text{SNewt}(f_u)$ .

Para esto, llamemos  $Q = \text{Newt}(f_u)$  al politopo de Newton y consideremos el poliedro levantado

$$Q^u = \text{conv}((a, u(a)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid a \in A). \quad (1.14)$$

El elemento  $x$  satisface que  $u(a) + \langle x, a \rangle$  alcanza el máximo para  $a \in D_u(x)$ . Así,

$$u(a) + \langle x, a \rangle \geq u(b) + \langle x, b \rangle$$

para todo  $b \in A$ . En otras palabras,

$$\langle (x, 1), (a, u(a)) \rangle \geq \langle (x, 1), (b, u(b)) \rangle$$

como  $(b, u(b))$  son los vértices de  $Q^u$  entonces tenemos que el funcional  $\langle (x, 1), - \rangle$  alcanza su máximo exactamente en los vértices de  $Q^u$  de la forma  $(a, u(a))$  con  $a \in D_u(x)$ . Así, por la Proposición 1.1.1 parte 3., tenemos que

$$\text{cara}_{(x,1)} Q^u = \text{conv}((a, u(a)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid a \in D_u(x))$$

es una cara superior de  $Q^u$ . Su proyección a la primera coordenada es  $\text{conv}(D_u(x)) = \Lambda(C)$ , y por lo tanto  $\Lambda(C)$  es un elemento en la subdivisión regular  $\text{SNewt}(f_u)$ . En particular mostramos la igualdad

$$\text{conv}(D_u(x)) = \pi_1 \text{cara}_{(x,1)} Q^u \quad (1.15)$$

donde  $\pi_1$  representa la proyección a la primera coordenada de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

Esto muestra que el mapa está bien definido.

2.  $\Lambda$  es sobreyectiva: Consideremos una celula  $P \in \text{SNewt}(f_u)$ . Por definición,  $P$  es la proyección de una cara superior de  $Q^u$ . Como toda cara superior de  $Q^u$  es de la forma  $\text{cara}_{(x,1)} Q^u$  para algún  $x$ , tenemos por (1.15) que  $P = \text{conv}(D_u(x))$ . Así, si  $x \in \text{intrel}(C)$  entonces  $\Lambda(C) = P$ .
3.  $\Lambda$  es inyectiva: Supongamos que  $\Lambda(C) = \Lambda(C')$ , entonces tomando  $x \in \text{intrel}(C)$  y  $x' \in \text{intrel}(C')$  tenemos que  $\text{conv}(D_u(x)) = \text{conv}(D_u(x'))$ . Luego, por el Lema 1.3.2, dado  $a \in D_u(x)$  tenemos que  $a \in \text{conv}(D_u(x'))$  por lo que  $a \in D_u(x')$ , así  $D_u(x) \subseteq D_u(x')$ . De manera similar  $D_u(x') \subseteq D_u(x)$  por lo que  $D_u(x) = D_u(x')$ .

Con todo esto vemos que  $\Lambda$  es una biyección. Definimos el mapa  $C$  del enunciado por el inverso de  $\Lambda$ . Note que se cumple que

$$C(\text{conv}(D_u(x))) = C(D_u(x))$$

por lo que  $C$  es compatible con la definición previa de la célula  $C(X)$  del complejo de Gröbner.

- *Revierte dimensión:* Sea  $P \in \text{SNewt}(f_u)$ . El subespacio afín generado por  $\Lambda(P)$  comprende los  $x \in \mathbb{R}^n$  tales que la expresión

$$u(a) + \langle x, a \rangle$$

se mantiene constante independiente de  $a \in D_u(x)$ , es decir, todos los  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\langle x, a - a' \rangle = u(a) - u(a')$  para tales  $a, a'$ . Si  $P = \text{conv}(D_u(x))$  es una cara  $k$ -dimensional, hay  $k$  vectores l.i de la forma  $a - a'$ , y por lo tanto  $k$  restricciones l.i en  $x'$ . Luego

$$\dim(\Lambda(P)) = n - k.$$

- *Ortogonalidad:* Dado  $P \in \text{SNewt}(f_u)$ , debemos ver que  $P$  es ortogonal a  $\Lambda(P)$ .

Hemos visto que  $\forall a, a' \in D_u(x)$  y todo  $x' \in \Lambda(P)$  tenemos

$$\langle x', a - a' \rangle = u(a) - u(a'). \quad (1.16)$$

Ahora considere  $x'' \in \Lambda(P)$  y  $a, a' \in D_u(x)$ , entonces tenemos también  $\langle x'', a - a' \rangle = u(a) - u(a')$ . Reemplazando esto último en (1.16) tenemos

$$\langle x - x'', a - a' \rangle = 0$$

- *Revierte incidencia:* Consideremos celulas  $P, P'$  de  $\text{SNewt}(f_u)$  tales que  $P'$  es una cara de  $P$ . Por la biyección mostrada tenemos que  $P = \text{conv}(D_u(x))$  y  $P' = \text{conv}(D_u(x'))$  para ciertos  $x, x'$ . De donde

$$\text{conv}(D_u(x')) \subseteq \text{conv}(D_u(x)).$$

Notemos ahora que dado  $a \in D_u(x')$ , tenemos que  $a' \in \text{conv}(D_u(x))$ . Luego, por el Lema 1.3.2,  $a \in D_u(x)$ . Así

$$D_u(x') \subseteq D_u(x).$$

De donde

$$C(P') = C(\text{conv}(D_u(x'))) = C(D_u(x')) \subseteq C(D_u(x)) = C(\text{conv}(D_u(x))) = C(P).$$

Donde la desigualdad en medio proviene del Teorema de estructura 1.2.1.

□

El siguiente corolario es una consecuencia del teorema de dualidad.

**Corolario 1.3.1.** *La subdivisión regular del politopo de Newton esta dada por la familia de conjuntos*

$$\text{SNewt}(f_u) = \{\text{conv}(D_u(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

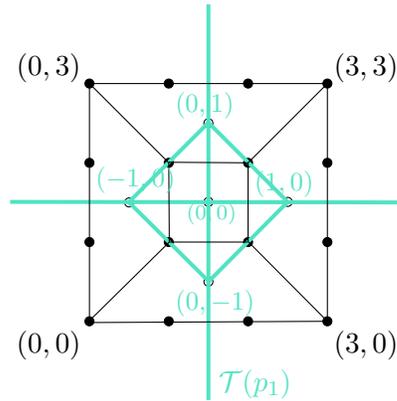


Figura 1.18: Subdivisión  $\text{SNewt}(p_1)$  y una curva tropical dual  $\mathcal{T}(p_1)$ .

Notemos que gracias al teorema de dualidad podríamos tomar cualquiera de los dos complejos poliedrales asociados a un polinomio tropical y esbozar el dibujo de su complejo dual. Consideremos la subdivisión regular del polígono de Newton inducido por  $p_1$  del Ejemplo 1.3.1 y veamos que dibujando su curva dual, como vemos en la Figura 1.18, obtenemos  $\mathcal{T}(p_1)$ , hipersuperficie que ya fue calculada en el Ejemplo 1.2.3 para el polinomio  $p_1$ . La subdivisión de  $\text{Newt}(p_1)$ , como complejo poliedral, posee múltiples curvas tropicales duales. El recíproco del enunciado anterior también se cumple. En la figura arriba tenemos una curva  $\mathcal{T}(p_1)$  dual a  $\text{SNewt}(p_1)$ . Ponemos énfasis en que esta curva no es su única curva dual. Una curva dual a esta subdivisión será toda curva tropical que cumpla con el comportamiento angular de  $\mathcal{T}(p_1)$ . De la misma manera  $\mathcal{T}(p_1)$  es dual a toda subdivisión que respete el comportamiento angular de la subdivisión regular de  $\text{Newt}(p_1)$ . Según el teorema de dualidad, la dualidad que tenemos en las caras de  $\text{SNewt}(p_1)$  respecto a  $\mathcal{T}(p_1)$  es la siguiente.

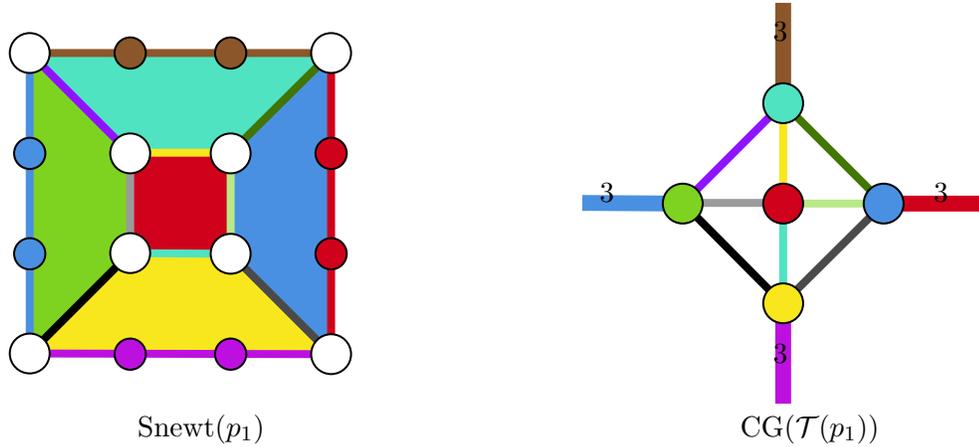


Figura 1.19: Caras  $k$ -dimensionales en  $S\text{Newt}(p_1)$  ortogonales a caras  $(2 - k)$ -dimensionales en  $\mathcal{T}(p_1)$ .

A continuación finalizaremos este capítulo definiendo el peso de una faceta de una hipersuperficie tropical y cómo, gracias a esta definición y el teorema de dualidad, tenemos que toda hipersuperficie tropical satisface la condición de balance.

**Definición 1.3.2.** Sea  $p \in \mathbb{T}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$ . Definimos el peso de una faceta  $F \in \mathcal{T}(p)$ , denotado por  $\omega(F)$ , como

$$\omega(F) = m - 1.$$

Donde  $m$  es la cardinalidad del conjunto  $\#(\mathbb{Z}^n \cap C(F))$ , esto es, es el número de puntos reticulados en  $C(F)$ .

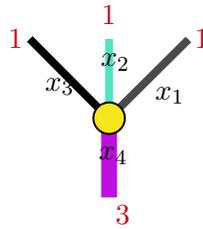


Figura 1.20: Acercamiento al punto  $(0, -1)$  en  $\mathcal{T}(p_1)$ .

Vemos la Figura 1.20, donde  $x_1 = (1, 1)$ ,  $x_2 = (0, 1)$ ,  $x_3 = (-1, 1)$ ,  $x_4 = (0, -1)$  son vectores primitivos. Note que en  $(0, -1)$  se cumple la igualdad  $1 \cdot (1, 1) + 1 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (-1, 1) + 3 \cdot (0, -1) = 0$ . Luego se cumple la condición de balance en  $(0, -1) \in \mathcal{T}(p_1)$ . Luego es fácil comprobar que la condición de balance se cumple en todo vértice de  $\mathcal{T}(p_1)$  y es un complejo poliedral balanceado.

**Teorema 1.3.2.** Sea  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . La hipersuperficie  $\mathcal{T}(f_u)$ , equipada de una estructura de complejo poliedral y un peso para sus facetas, es un complejo poliedral balanceado.

**Demostración.** Por la Proposición 1.2.1,  $\mathcal{T}(f_u)$  es un complejo poliedral racional  $(n - 1)$ -dimensional en un espacio afín  $\mathbb{R}^n$ . Sean  $\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_j$  caras en  $\mathcal{T}(f_u)$  tales que  $\dim(\tau) =$

$\dim(\sigma_i) - 1 = n - 2$  para todo  $i = 1, \dots, j$ . Fijamos  $\tau$  y un vector primitivo  $x_i$  en  $\sigma_i$  ortogonal a  $\tau$ .

Notemos que lo siguiente es consecuencia de las condiciones del teorema de dualidad. Por la reversión de dimensiones tenemos que  $\sigma$ , al ser  $n - 1$  dimensional, es dual a una cara de dimensión 1 (codimensión  $n - 1$ ), de esta forma las facetas de  $\mathcal{T}(f_u)$  son duales a segmentos de rectas en  $\text{SNewt}(f_u)$ . Por la ortogonalidad, las facetas  $\sigma_i$  de  $\mathcal{T}(f_u)$  son ortogonales a sus caras duales en  $\text{SNewt}(f_u)$ , por lo que el vector primitivo  $x_i$  rotado en  $\pi/2$  es exactamente igual a su borde dual en  $\text{SNewt}(f_u)$ . La longitud  $\|\omega(\sigma_i) \cdot x_i\|$  en  $\mathcal{T}(f_u)$  es la misma a  $\|\Lambda(\sigma_i)\|$  en  $\text{Newt}(p)$ , esto nos asegura la igualdad

$$\sum_{i=1, \dots, j} \omega(\sigma_i) \cdot x_i = \sum_{i=1, \dots, j} \Lambda(\sigma_i) \hat{x}_i \quad (1.17)$$

donde  $\Lambda(\cdot)$  denota a la cara dual de su argumento, según el teorema de dualidad. Luego, claramente el lado derecho de (1.17) es cero, pues es recorrer los bordes de un polígono convexo, esto es, los vectores direccionales que definen sus bordes siempre vuelven al mismo punto de partida.  $\square$

Según la Figura 1.20, geoméricamente está pasando lo siguiente. Dado  $q$  un polinomio tropical, un vector primitivo  $x$  asociado a una faceta  $F \in \mathcal{T}(q)$  es un vector que indica la dirección de  $F$ . Este vector, mediante la transformación  $\omega(F) \cdot x$ , cumple que  $\|\omega(F) \cdot x\|$  es igual a la longitud de la cara dual de  $F$  en  $\text{SNewt}(q)$ . Note que en la figura  $\|3 \cdot x_4\| = 3$ , que es la longitud de la cara dual en  $\text{SNewt}(p_1)$  descrita por el segmento comprendido en  $(0, 0)$  y  $(3, 0)$ . En la Figura 1.21 se ilustra geoméricamente como los vectores rojo, verde y azul en (c), son los mismos vectores en (b) rotados en  $\pi/2$ . Los vectores en color en (c) son resultado del producto de pesos y vectores primitivos asociados a sus respectivas facetas. Gracias al teorema de dualidad y la definición de peso de una faceta podemos asegurar que toda curva tropical cumple la condición de balance y luego induce un complejo poliedral balanceado. Esto es directo si vemos la subdivisión dual asociada al punto donde estamos estudiando el balance. Vea en la figura abajo que (b) es la subdivisión dual a (c). Si en (b) realizamos la suma de los tres vectores de sus aristas tenemos  $(0, 0)$ , pues da una vuelta completa. Luego la condición de balance en (c) se cumple ya que se realiza la misma suma de los vectores en (b) rotados en  $\pi/2$ .

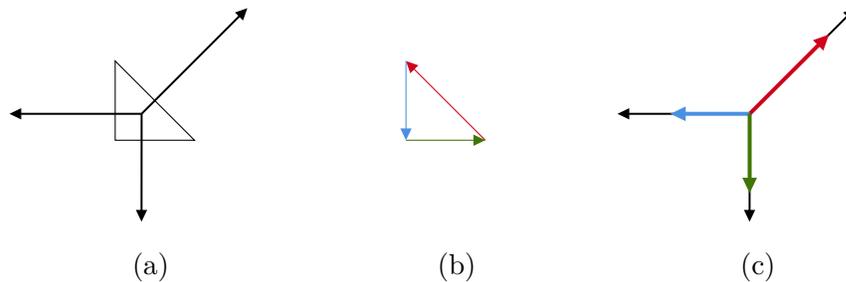


Figura 1.21: Curva tropical que cumple la condición de balance con facetas y facetas normales coloreadas

Ahora notemos que combinando los Teoremas 1.2.1 y 1.3.2 tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 1.3.2.** *Dada una función  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , la hipersuperficie tropical  $\mathcal{T}(f_u)$  es un complejo poliedral racional balanceado  $(n - 1)$ -dimensional.*

Vale notar que estas propiedades caracterizan de forma total las hipersuperficies tropical, en el siguiente sentido.

**Proposición 1.3.1.** *Todo complejo poliedral racional balanceado  $(n - 1)$ -dimensional es de la forma  $\mathcal{T}(f_u)$  para alguna función  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .*

Para la prueba de este resultado vea la [Proposición 2.4] de [Mikhalkin \(2004\)](#).

## Capítulo 2

# Análisis Geométrico de la Demanda Indivisible con Geometría Tropical

En este capítulo estudiaremos la conexión entre la geometría tropical y el estudio de la demanda de bienes indivisibles que fue mencionada en la introducción. El enfoque será el de [Baldwin y Klemperer \(2019\)](#) que utiliza la teoría de hipersuperficies tropicales para modelar la mecánica de las subastas *product-mix* para bienes indivisibles.

En la primera sección de este capítulo vemos como las herramientas de geometría tropical nos permiten dar un entendimiento geométrico de la preferencia y la demanda de bienes indivisibles. En la segunda sección nos enfocamos en la clasificación de estas preferencias bajo la noción de *tipos de demanda*. La tercera sección estudia la preferencia de familias de agentes y el correspondiente concepto de *equilibrio competitivo* entre ellas. El estudio de criterios para la existencia de equilibrios competitivos es uno de los problemas cruciales de la teoría de subastas, y en la cuarta sección estudiamos un resultado en esta dirección llamado el *Teorema de unimodularidad*. Finalmente, si existe un equilibrio competitivo, este puede manifestarse en distintas asignaciones de los bienes entre los agentes, escoger entre una de estas asignaciones puede no ser un problema simple y en nuestra ultima sección presentamos un algoritmo de nuestra autoría para escoger dicha asignación de una manera que bajo ciertos casos resulta más beneficiosas para lo agentes.

### 2.1. Geometría de la demanda indivisible

#### 2.1.1. Elementos de la teoría del consumidor

El área de la microeconomía en la cual se estudia la relación entre la demanda y la preferencia de agentes económicos es conocida como la teoría del consumidor. Comenzaremos esta sección introduciendo algunos de los objetos de esta teoría con los que trabajaremos a lo largo del capítulo.

Consideremos una economía de mercado con  $n$  tipos de bienes presentados de forma ordenada. Dos tipos de vectores aparecen de forma natural al modelar este escenario bajo

el punto de vista de la teoría del consumidor, los *vectores de cantidades*  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  donde cada coordenada  $x_i$  representa las unidades del bien  $i$ -ésimo, y los *vectores de precios*  $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  donde cada coordenada  $p_i$  representa el precio fijado para el bien  $i$ -ésimo.

Nos referiremos al espacio  $\mathbb{R}^n$  donde viven los vectores de cantidades como el **espacio de cantidades** y al espacio  $\mathbb{R}^n$  donde viven los vectores de precio como el **espacio de precios**. Los elementos del espacio de precios serán llamados **cestas**. A pesar de que ambos espacios sean  $\mathbb{R}^n$  nos esforzaremos en considerarlos distintos. Note que el espacios de precios es naturalmente dual al espacio de cantidades, en el sentido de que existe un *producto de dualidad* entre ellos dado por

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (p_1, \dots, p_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Este producto representa el precio final de  $(x_1, \dots, x_n)$  una vez que los precios  $(p_1, \dots, p_n)$  han sido fijados.

Notemos que en el espacio de cantidades, cada uno de los bienes puede estar disponible en varias unidades. Pero el precio que se le asigna a las cestas, que viene dado por el producto de dualidad, nos asegura que existe linealidad en el precio. Es decir, múltiples unidades del mismo bien se venden al múltiplo correspondiente del precio de una unidad. Para modelar precios diferentes en unidades del mismo bien, debemos tratar dichas unidades con precios distintos como bienes diferentes.

Decimos que una economía tiene **bienes indivisibles** si el tipo de bienes considerado solo acepta cantidades enteras, en caso contrario diremos que la economía tiene **bienes divisibles**. Por ejemplo, una economía que modela la venta de automóviles es una economía indivisible y una economía que modela la venta de combustible sería una economía divisible. A lo largo de este documento estaremos interesados solo en economías de bienes indivisibles. Es decir, todos nuestros vectores de cantidades se encontraran en  $\mathbb{Z}^n$ .

Una cesta, al estar en  $\mathbb{Z}^n$ , puede ser de signo tanto negativo como positivo. Permitimos vectores con coeficientes de ambos signos puesto que así la teoría nos permite modelar tanto a vendedores como compradores.

Dado un conjunto  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$  de cestas, un agente se puede ver más interesado con respecto a unas cestas que a otras. Usaremos la notación  $x \succeq y$  para indicar que el consumidor piensa que la cesta  $x \in A$  es, al menos, tan buena como la cesta  $y \in A$ . Esto nos da una relación binaria en el conjunto  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$  de cestas. Queremos que las preferencias *ordenen* el conjunto de cestas, para lo cual necesitamos suponer que satisfacen determinadas propiedades convencionales.

1. **Completitud:**  $\forall x, y \in A, x \succeq y \vee y \succeq x$
2. **transitividad:**  $\forall x, y, z \in A, x \succeq y \wedge y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$
3. **reflexividad:**  $\forall x \in A, x \succeq x$ .

Estas propiedades forman la esencia de la preferencia del agente, por ello las usamos para abstraer la noción de preferencia. Una **preferencia** es una relación binaria  $\succeq$  entre elementos de  $A$  que satisface las tres propiedades arriba.

Dada una ordenación  $\succeq$  que describa una preferencia, podemos definir el concepto de **indiferencia** que denotamos con  $x \sim y$  y significa

$$x \sim y \Leftrightarrow (x \succeq y) \wedge (y \succeq x).$$

En el análisis económico suele resultar útil resumir la conducta de un consumidor por medio de una *función de utilidad*. Una **función de utilidad** es una función  $U : A \rightarrow \mathbb{R}$  que asigna números a todas las cestas de consumo posibles, tales los números los interpretaremos de forma tal que las cestas que tengan un número más alto se prefieran más que las cestas que tienen un número más bajo. Dada una función de utilidad podemos definir la relación binaria  $x \succeq y$  ssi  $U(x) > U(y)$ . Esta relación nos da una preferencia en el sentido descrito anteriormente.

Las funciones de utilidad pueden ser muy útiles para describir las preferencias, pero a estas no se les debe dar una interpretación psicológica. La única característica importante es su carácter ordinal.

### 2.1.2. Interpretación económica de la geometría tropical

Dado un conjunto  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$  en el espacio de cantidades, nos referiremos a una función  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  como una **valoración**. Al conjunto  $A$  nos referiremos como **dominio** o soporte de la valoración. La interpretación de la noción de valoración puede variar dependiendo del contexto donde nos encontremos. En el ámbito de este documento, una valoración es una función que representa lo que un agente está dispuesto a pagar por cada cesta en el conjunto  $A$ .

Dado un agente con valoración  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y una elección de precios  $p \in \mathbb{R}^n$ , la *utilidad* que entrega una cesta  $x \in A$  corresponde a la diferencia entre la valoración de  $x$  y el precio de  $x$ . En términos simbólicos, la utilidad que presenta  $x \in A$  es

$$u(x) - \langle p, x \rangle.$$

Esta expresión nos entrega una función de utilidad para el conjunto  $A$  en el sentido previamente definido y su forma explícita nos asegura que el agente tiene preferencia cuasilineal. Notemos que la utilidad del agente, y por tanto su preferencia, dependen del precio  $p \in \mathbb{R}^n$  previamente fijado. Sin embargo, la valoración es un objeto independiente de su precio.

El agente se interesara en adquirir aquellos bienes que maximicen su utilidad. La maximización de la utilidad, dada cualquier valoración  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  esta dada por la expresión

$$f_u(p) = \max_{x \in A} (u(x) - \langle p, x \rangle). \quad (2.1)$$

Notemos inmediatamente que (2.1) es una función inducida por un polinomio tropical. En la notación del capítulo anterior tenemos

$$f_u(p) = \bigoplus_{x \in A} u(x) \odot p^{-x}. \quad (2.2)$$

Nos referiremos al **conjunto de demanda** como el conjunto todas las cestas  $x \in A$  que maximizan la utilidad, esto es

$$D_u(p) := \operatorname{argmax}_{x \in A} \{u(x) - \langle p, x \rangle\}. \quad (2.3)$$

Notemos que este conjunto coincide con su equivalente en geometría tropical introducido en (1.9), aplicado en el polinomio  $\bigoplus_{x \in A} u(x) \odot p^{-x}$ .

Esto nos lleva al problema de entender la demanda  $D_u(p)$  como función respecto al precio  $p$ , dependiendo de los valores este conjunto puede variar considerablemente. Como veremos más adelante, para la mayoría de los precios  $p$  el conjunto  $D_u(P)$  consiste solo de una cesta. Sin embargo, toda la acción tiene lugar en aquellos precios  $p$  en los que se demanda más de una cesta. Este conjunto de precios, llamado el *locus de precios de indiferencia*, es nuestro principal objeto de estudio.

**Definición 2.1.1.** *El Locus de precios de indiferencia (LPI) es*

$$\mathcal{L}_u := \{p \in \mathbb{R}^n : |D_u(p)| > 1\}. \quad (2.4)$$

$\mathcal{L}_u$  comprende todos los precios en los que se demanda más de una cesta, esto es equivalente a calcular todos los  $p \in \mathbb{R}^n$  tales que el polinomio tropical  $f_u(p)$  se maximiza a lo menos dos veces. Así  $\mathcal{L}_u$  es un objeto geométrico, el cual conocimos en el mundo tropical como hipersuperficie tropical. De esta forma estudiar las preferencias mediante una función de utilidad será equivalente a estudiar un polinomio tropical, y estudiar el locus de precios de indiferencia de una valoración es equivalente a estudiar la hipersuperficie tropical de un polinomio. De esta forma decimos

**Proposición 2.1.1.** *Sea  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función de valoración sobre el dominio finito  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ .*

$$\mathcal{L}_u = \mathcal{T}(f_u)$$

**Demostración.** Directamente por la definición de ambos conjuntos. □

El LPI comprende los únicos precios a los que la demanda puede cambiar en respuesta a una pequeña variación de precios. Considere, a modo de ejemplo, el polinomio tropical  $f(x, y) = c \oplus a \odot x^{-1} \oplus b \odot y^{-1} \oplus 0$  que se identifica con la valoración  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $u(0, 0) = 0$ ,  $u(1, 0) = a$  y  $u(0, 1) = b$ . Luego la hipersuperficie tropical  $\mathcal{T}(p)$  en  $\mathbb{R}^2$  es equivalente al LPI en la Figura 2.1.

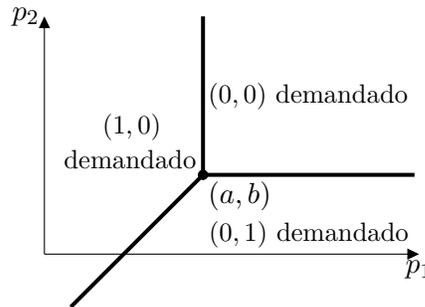


Figura 2.1: LPI para la valoración  $u$  tal que  $u(0, 0) = 0$ ,  $u(1, 0) = a$ ,  $u(0, 1) = b$ .

Tenemos que el objeto  $\mathcal{L}_u$  es una hipersuperficie tropical. Esto nos asegura, gracias a la Proposición 1.2.1, que  $\mathcal{L}_u$  posee una estructura de complejo poliedral de forma natural y una noción de peso para sus facetas. De esta manera  $\mathcal{L}_u$ , equipado con dicha estructura, es un complejo poliedral balanceado  $n - 1$  dimensional en  $\mathbb{R}^n$ . A continuación introduciremos el equivalente al complejo de Gröbner en el contexto de económico.

**Definición 2.1.2.** Sea  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos el **complejo de precios** como el complejo de Gröbner  $\text{CG}(f_u)$ .

El interior relativo de las facetas del complejo de precios se llamarán *Región de Demanda Única*. Esto debido a la interpretación económica que poseen. Se está demandando únicamente una cesta para todos los vectores de precios  $p \in \mathbb{R}^n$  que están en una región de demanda única. Baldwin y Klemperer (2019).

**Definición 2.1.3.** Sea  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Una **Región de Demanda Única** (RDU) de  $u$  es el conjunto de todos los precios para los cuales dado un cesta  $x \in A$  es únicamente demandado. Así, para algún  $x \in A$ , la RDU asociada a  $x$  es el conjunto

$$\{p \in \mathbb{R}^n : D_u(p) = \{x\}\}.$$

Notemos que las RDUs comprenden el conjunto  $\{p \in \mathbb{R}^n : p \notin \mathcal{L}_u\}$ . Por otro lado, introduciremos ahora el *complejo de demanda* que es el equivalente económico a la subdivisión regular del politopo de Newton, inducido por las alturas dadas por la valoración  $u$ .

**Definición 2.1.4.** Sea  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos el **complejo de demanda** como la subdivisión regular de  $\text{conv}(A)$  inducida por utilizar  $u$  como la función altura.

Utilizando el Corolario 1.3.1 al Teorema de dualidad concluimos que el complejo de demanda es igual al conjunto

$$\text{SNewt}(f_u) = \{\text{conv}(D_u(p)) : p \in \mathbb{R}^n\},$$

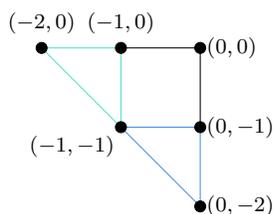
esto es, es la familia de todas las posibles demandas de  $u$  obtenidas al variar el precio de los bienes.

El Teorema de dualidad mostrado en el capítulo anterior implica que los interiores relativos de las células del complejo de precios forman una partición de  $\mathbb{R}^n$ , esta partición es exactamente la partición de  $\mathbb{R}^n$  sobre la cual la demanda  $p \mapsto D_u(p)$  permanece constante. Si  $C$  corresponde a una célula en el complejo de precios, su elemento dual en el complejo de demanda está dado por  $\text{conv}(D_u(p))$  donde  $D_u(p)$  es la demanda en un valor  $p \in \text{intrel } C$ .

Volvamos a considerar el ejemplo con peras y manzanas de la introducción. En la Figura 2.2 podemos ver la dualidad entre el complejo de precios y el complejo de demanda para alguna colección de valoraciones dadas. Notemos que las coordenadas del complejo de demanda son negativas, esto es debido a que el polinomio tropical que representa la maximización de las utilidades de los agentes posee exponente negativo. Es por esto que vemos el politopo de Newton en  $\mathbb{Z}_{\leq 0}^2$ . La interpretación económica aquí es la siguiente:

- ★ El elemento ordenado  $x = (-x_1, \dots, -x_n)$  con  $x_i \geq 0$  e  $i = 1, \dots, n$  representa económicamente  $x_i$  veces el bien  $i$ . Por ejemplo, en la Figura 2.2 el punto  $(0, -2)$  en el complejo de demanda es cero unidades de peras y dos unidades de manzana. Si vemos su elemento dual, es la RDU con el  $2m$  en su interior, lo que indica que se están demandando 2 manzanas. De esta forma podemos identificar fácilmente qué cestas se demandan únicamente en cada RDU viendo su cara dual en el complejo de demanda.

Complejo de demanda en el espacio de cantidades  $\mathbb{Z}^n$



dualidad

Complejo de precios en el espacio de precios  $\mathbb{R}^n$

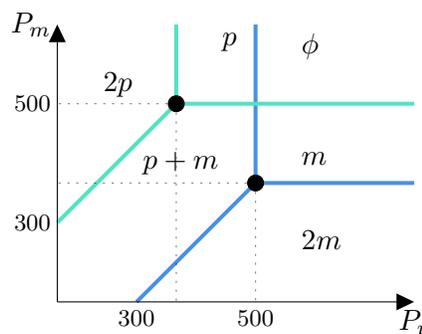


Figura 2.2: Dualidad entre el complejo de precios y el complejo de demanda

Dada esta interpretación económica establecida, hablaremos sin ambigüedad que que las cestas negativas representan unidades positivas de bienes ordenados. Vea como en la Figura 2.3.1 ya no utilizamos la coordenada negativa para describir los puntos de los politopos de Newton.

## 2.2. Tipos de demanda

Esta sección introduce la taxonomía que inicialmente muestran Baldwin y Klemperer (2013) y luego consolidan en el trabajo Baldwin y Klemperer (2019). Dando así, una clasificación para el *tipo de demanda* que, inducida por sus valoraciones, posee un agente.

**Definición 2.2.1.** Sea  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^n$  un conjunto de vectores primitivos no nulos tal que si  $v \in \mathcal{D}$ , entonces  $-v \in \mathcal{D}$ . El **tipo de demanda** definido por  $\mathcal{D}$  comprende valoraciones  $u$  tal que toda faceta de  $\mathcal{L}_u$  posee vector normal en  $\mathcal{D}$ . A estos vectores los llamaremos **vectores normales**.

Considere, por ejemplo, una valoración que tiene por hipersuperficie la Figura 2.3 y vectores  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}^n$  primitivos tales que son normales a cada faceta de la hipersuperficie. Así,  $\pm\{x_1, x_2, x_3\}$  son los vectores normales del locus de precios de indiferencia dibujado abajo y definen su tipo de demanda.

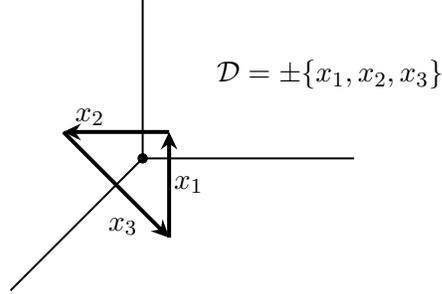


Figura 2.3: Vectores normales  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  que forman el tipo de demanda para algún  $\mathcal{L}$  que tiene la forma característica de esta figura.

La siguiente proposición nos da una interpretación para la definición de demanda. Esta caracteriza todos los posibles cambios en la demanda de un agente al variar el precio.

**Proposición 2.2.1.** *Los siguientes resultados son equivalentes para una valoración  $u$ :*

1.  $u$  es de tipo de demanda  $\mathcal{D}$ ;
2. Para cualquier  $t \in \mathbb{R}^n$ , y para  $p \in \mathbb{R}^n$  genérico, si  $\exists \varepsilon > 0$  tal que  $p$  y  $p + \varepsilon t$  están en distintas RDU, y tal que  $\exists \varepsilon' \in (0, \varepsilon)$  tal que  $p + \varepsilon' t$  está en una tercera RDU distinta, entonces la diferencia entre cestas demandadas entre  $p$  y  $p + \varepsilon t$  es un múltiplo entero de algún vector en  $\mathcal{D}$ .

Para ver esta proposición y su demostración revisar [Proposition 3.3] en [Baldwin y Klemperer \(2019\)](#).

Así, los vectores en  $\mathcal{D}$ , definen cómo cambia la demanda entre regiones de demanda única. Por lo tanto, dan todas las posibles direcciones de cambio en la demanda (si las hay) que pueden resultar genéricamente de un pequeño cambio en los precios. Por lo tanto, es natural clasificar las valoraciones en tipos de demanda de acuerdo con los vectores normales.

La siguiente proposición nos caracteriza que conjuntos de vectores pueden ser el tipo de demanda de una valoración.

**Proposición 2.2.2.** *Todo tipo de demanda definido por un conjunto finito de vectores primitivos enteros,  $\mathcal{D}$ , es el tipo de demanda minimal para alguna valoración.*

**Demostración.** Para cada vector  $v \in \mathcal{D}$ . Consideremos un hiperplano normal a  $v$  en  $\mathbb{R}^n$ . El conjunto de todos estos hiperplanos subdivide  $\mathbb{R}^n$  en regiones poliedrales, las cuales definen un complejo poliedral  $\Sigma$ . Luego  $\Sigma$  es un complejo poliedral racional y  $(\Sigma, w)$  es un complejo balanceado, donde  $w$  es el vector que asigna un peso  $w(F) = 1$  para toda faceta  $F \in \Sigma$ . Por la Proposición 1.3.1, existe un conjunto finito  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$  y una función  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}$  y  $w_u = w$ . Luego el tipo de demanda asociado a  $\mathcal{L}_u$  y a  $\mathcal{L}$  es el mismo.  $\square$

### 2.2.1. Ejemplos de tipos de demanda

Una clasificación clásica de las valoraciones de un agente está dada por los conceptos de valoración sustitutiva, complementaria y sustitutiva fuerte. En esta sección introduciremos

estas nociones y veremos como esta clasificación tiene una traducción natural en el lenguaje de los tipos de demanda.

**Definición 2.2.2.** Sea  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que la valoración  $u$  es

1. **sustitutiva ordinaria** si, para precios cualesquiera en RDU  $p' \geq p$  con  $D_u(p) = \{x\}$  y  $D_u(p') = \{x'\}$ , tenemos  $x'_k \geq x_k$  para todo  $k$  tal que  $p'_k = p_k$ .
2. **complementario ordinario** si, para precios cualesquiera en RDU  $p' \geq p$  con  $D_u(p) = \{x\}$  y  $D_u(p') = \{x'\}$ , tenemos  $x'_k \leq x_k$  para todo  $k$  tal que  $p'_k = p_k$ .
3. **sustitutiva fuerte** si, cuando consideramos cada unidad de cada bien como un bien separado, es una valoración de sustitutos ordinarios.

**Ejemplo 2.2.1.** Veamos un ejemplo para cada una de los tipos de valoración arriba.

1. Una valoración sustitutiva ordinaria puede verse en el caso de tener que comprar fruta para el hogar. Quiero comprar sandías y naranjas, pero considero que una sandía equivale a 5 naranjas. Ante el alza de precios en, por ejemplo, la sandía, al dejar de comprar una sandía estaré comprando 5 naranjas. Por tanto, el cambio es de sustitución.
2. Una valoración complementaria ordinaria puede verse en el caso de tener que comprar pan y salchichas para hacer hot dogs. Ante el aumento de precios de un bien no me puedo decantar por elegir mayor cantidad del bien que no subió de precio. Esto por que si compro, por ejemplo, más panes que salchichas, no será posible hacer tantos hot dogs como la cantidad de panes que hay.
3. Una valoración sustitutiva fuerte puede entenderse en el caso de querer comprar refrescos para un viaje. Me gusta tanto el jugo de frutas como el agua mineral. Ante el aumento de precios de uno de los dos bienes, me decantaré sin problemas por el tipo de bien que no subió. Note que esto es un cambio uno es a uno, es decir, si dejo de comprar  $k$  jugos de frutas, compraré  $k$  aguas minerales. El primer ejemplo no cumple esto y no es es valoración sustitutiva fuerte.

Introduciremos ahora los conceptos análogos en el lenguaje de los tipos de demanda.

**Definición 2.2.3.**

1. Los vectores sustitutos ordinarios son el conjunto de vectores primitivos enteros no nulos  $v \in \mathbb{Z}^n$  con a lo más una coordenada negativa y a lo más una coordenada positiva. Este conjunto define el **tipo de demanda sustitutiva ordinaria** (para  $n$  bienes).
2. Los vectores complementarios ordinarios son el conjunto de vectores primitivos no nulos  $v \in \mathbb{Z}^n$  cuyas coordenadas distintas de cero tienen el mismo signo. Esto define el **tipo de demanda complementaria ordinaria** (para  $n$  bienes).

3. Los vectores sustitutivos fuertes son vectores  $v \in \mathbb{Z}^n$  no nulos los cuales tienen a lo más una coordenada  $+1$ , y a lo más una coordenada  $-1$ , y el resto coordenadas nulas. Esto define el **tipo de demanda sustitutiva fuerte**.

La siguiente proposición nos da la equivalencia entre los dos puntos de vista en esta clasificación.

**Proposición 2.2.3.**

1. Una valoración es una valoración sustituta ordinaria ssi es del tipo de demanda sustituta ordinaria.
2. Una valoración es complementaria ordinaria ssi es de tipo de demanda complementaria ordinaria.
3. Una valoración es sustitutiva fuerte ssi es cóncava y es de tipo de demanda sustitutiva fuerte.

*Demostración.* Vea la [Sección 3.2] en [Baldwin y Klemperer \(2019\)](#) para la prueba de esta proposición.

## 2.3. Demanda agregada y equilibrio

En esta sección extenderemos el estudio de la preferencia a una familia de múltiples agentes. En particular, introduciremos la noción de *equilibrio competitivo*, una de las nociones principales de la teoría y consideraremos la noción de *demanda agregada* de múltiples agentes, que será una herramienta poderosa para el entendimiento de dichos equilibrios.

### 2.3.1. Estructura de la demanda agregada

Tenemos un conjunto  $J$  finito de agentes y cada agente  $j$  posee una valoración  $u^j$  de cestas enteras en un subconjunto  $A^j$  y con un locus de indiferencia  $\mathcal{L}_{u^j}$ . Estas construcciones nos dan una teoría para el tratamiento individual de las demandas  $D_{u^j}(p)$  que posee cada agente  $j$  a un precio  $p$ . A continuación construiremos los objetos necesarios para un estudio conjunto de las valoraciones y su demanda. En esta dirección definimos la **demanda agregada** a un precio  $p \in \mathbb{R}^n$  como la suma de Minkowski de las demandas individuales, esto es,

$$D_{\{u^j\}}(p) := \left\{ \sum_{j \in J} x^j : x^j \in D_{u^j}(p) \right\} = \sum_{j \in J} D_{u^j}(p). \quad (2.5)$$

Por otro lado, podemos combinar las funciones de valoración  $u^j$  individuales para obtener una **función de valoración agregada** como la función de valoración que asigna a cada cesta la mayor suma de valoraciones que se pueden obtener dividiendo esta cesta entre los

agentes, es decir, la división más eficiente de la cesta. En términos simbólicos esto es

$$U : A \subseteq \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \longmapsto \max \left\{ \sum_{j \in J} u^j(x^j) : x^j \in A_j, \sum_{j \in J} x^j = y \right\}.$$

Donde  $A$  representa **las cestas de interés en agregado**, esto es,

$$A := \left\{ \sum_{j \in J} x^j : x^j \in A^j \right\} = \sum_{j \in J} A^j.$$

Lo anterior puede ser entendido en el lenguaje de los polinomios tropicales, para esto consideremos los polinomios  $f_{u^j}$  y multipliquemoslos para obtener un **polinomio tropical agregado**

$$f_{u^J} := f_{u^1} \odot f_{u^2} \odot \cdots \odot f_{u^{\#(J)}}.$$

Así, la función de valoración agregada es la consistente en los coeficientes del polinomio producto  $f_{u^J}$ . La proposición siguiente nos da la relación entre todos los objetos introducidos.

**Proposición 2.3.1.** *Tenemos  $f_{\{u^j\}} = f_U$  y por lo tanto  $D_{\{u^j\}}(p) = D_U(p)$  para todo  $p \in \mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Sea  $J$  un subconjunto finito y considere valoraciones individuales  $u^j$  que inducen polinomios tropicales  $f_{u^j}$ . Veamos el producto  $f_{u^J}$  e identifiquemos los coeficientes de este. Entonces considere la productoria tropical sobre  $j \in J$  de los polinomios consistentes en las valoraciones individuales cuando  $x^j \in A^j$

$$\begin{aligned} \bigodot_{j \in J} f_{u^j} &= \bigodot_{j \in J} \left( \bigoplus_{x \in A^j} u^j(x) \odot p^{-x} \right) \\ &= \sum_{y \in A} \left[ \bigoplus_{\sum x^j = y} \left( \bigodot_{j \in J} u^j(x^j) \right) \right] \odot p^{-y} \\ &= \sum_{y \in A} \left( \max \left\{ \sum_{j \in J} u^j(x^j) : x^j \in A^j, \sum_{j \in J} x^j = y \right\} \right) \odot p^{-y} \end{aligned}$$

Donde en la segunda y tercera igualdad hemos reemplazad a libertad el producto y la suma tropical con su respectiva definición aritmética usual. Luego los coeficientes del producto de los polinomios inducidos por valoraciones  $u^j$  es en efecto la función  $U(y)$ .

Como un monomio en el producto  $f_{u^1} \odot f_{u^2} \odot \cdots \odot f_{u^{\#(J)}}$  alcanza el máximo si y solo si es un producto de monomios alcanzando el máximo en cada  $f_{u^j}$  tenemos que  $D_{\{u^j\}}(p) = D_U(p)$ . □

Como consecuencia de esta proposición tenemos el siguiente resultado que relación los locus de precios de indiferencia de las valoraciones  $u^j$  con el locus de precios de indiferencia de la valoración conjunta  $U$ .

**Proposición 2.3.2.** *El locus de precios de indiferencia de la valoración  $U$  es la unión de los locus de precios de indiferencia de las valoraciones  $u^j$ , esto es*

$$\mathcal{L}_U = \bigcup_{i \in J} \mathcal{L}_{u^i}.$$

**Demostración.** el conjunto  $\mathcal{L}_U$  son los precios en los que la demanda de  $U$  no es única. Pero como

$$D_U(p) = \left\{ \sum_{j \in J} x^j : x^j \in D_{u^j}(p) \right\} = \sum_{j \in J} D_{u^j}(p).$$

tenemos que la demanda agregada  $D_U(p)$  es única si y solo si todas las demandas individuales  $D_{u^j}(p)$  también lo son, el conjunto  $\mathcal{L}_U$  es así la unión de todos los conjuntos  $\mathcal{L}_{u^j}$ . Por lo tanto, simplemente *uniendo* las hipersuperficies individuales se obtiene la hipersuperficie agregada.  $\square$

Notemos que trabajar con la valoración  $U : A \rightarrow \mathbb{R}$  es altamente difícil, pues para encontrar cualquier valor  $U(y)$ , necesitamos considerar todas las posibles particiones de  $y$  entre los agentes, lo que carece de intuición y es no trivial de obtener. Por otro lado, es sencillo comenzar con los  $\mathcal{L}_{u^j}$ , combinarlos para formar una hipersuperficie agregada  $\mathcal{L}_U$  y encontrar información sobre la demanda agregada a partir de eso.

**Corolario 2.3.1.** *Valoraciones  $u^j$  son de tipo de demanda  $\mathcal{D}$  para todo  $j \in J$  ssi el agregado  $\mathcal{L}_U$  es de tipo de demanda  $\mathcal{D}$ .*

**Demostración.** El tipo de demanda de  $u^i$  esta dado por la familia de vectores normales a las facetas de  $\mathcal{L}_{u^i}$ . Si  $\mathcal{D}$  contiene todos los vectores normales de las facetas de  $\mathcal{L}_{u^i}$ , entonces contiene todos los vectores normales de las facetas de

$$\mathcal{L}_U = \bigcup_{i \in J} \mathcal{L}_{u^i}.$$

**Ejemplo 2.3.1.** *Dos amigos precisan arrendar un departamento en conjunto. El departamento tiene dos habitaciones, la primera de tamaño mediano y la segunda de tamaño pequeño. Tanto el primer amigo,  $u^1$ , como el segundo amigo,  $u^2$ , solo precisan de una habitación, por lo que de inmediato identificamos que poseen tipo de demanda sustitutiva fuerte. Ambos desean valorizar cada habitación por separado, ya que si alguien valora en un precio las dos habitaciones, no tendría sentido arrendar en conjunto. los dos amigos poseen valoraciones  $\{u^1(a) : a \in A^1\}$  y  $\{u^2(a) : a \in A^2\}$  respectivamente. Con dominios individuales*

$$A^1 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\} \quad y \quad A^2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$$

*tal que tienen las siguientes valoraciones por los elementos del dominio*

$$\begin{array}{ll} u^1(0, 0) = 0 & u^2(0, 0) = 0 \\ u^1(1, 0) = 30 & u^2(1, 0) = 35 \\ u^1(0, 1) = 25 & u^2(0, 1) = 20 \end{array}$$

*Estas valoraciones inducen polinomios tropicales, es decir, funciones de utilidad*

$$f_{u^1}(x, y) = 0 \oplus (30 \odot x^{-1}) \oplus (25 \odot y^{-1}) \quad y \quad f_{u^2}(x, y) = 0 \oplus (35 \odot x^{-1}) \oplus (20 \odot y^{-1})$$

Debemos tener en cuenta la que valoración agregada es la función consistente en los coeficientes del producto tropical de los polinomios que las valoraciones individuales inducen. Entonces calculamos el producto  $f_{u^1} \odot f_{u^2}$  bajo la notación “ $(\cdot)$ ”, que fue mencionada en el primer capítulo, para evitar confusión con los símbolos  $\odot$  y  $\oplus$  en una expresión muy grande. De esta manera

$$\begin{aligned} f_{u^1} \odot f_{u^2} &= “f_{u^1} f_{u^2}” \\ &= “(0 + 30x^{-1} + 25y^{-1})(0 + 35x^{-1} + 20y^{-1})” \\ &= “0 + 35x^{-1} + 20y^{-1} + 30x^{-1} + 65x^{-2} + 50x^{-1}y^{-1} + 25y^{-1} + 60x^{-1}y^{-1} + 45y^{-2}” \\ &= \text{máx}(0, 35 - x, 20 - y, 30 - x, 65 - 2x, 50 - x - y, 25 - y, 60 - x - y, 45 - 2y) \\ &= \text{máx}(0, 35 - x, 60 - 2x, 25 - y, 65 - x - y, 45 - 2y) \end{aligned}$$

Luego la función  $U(\cdot)$ , con el nuevo dominio  $A$ , es el mapa

$A = A^1 + A^2$	$U(\cdot)$
$(0, 0)$	→ 0
$(1, 0)$	→ 35
$(2, 0)$	→ 65
$(0, 1)$	→ 25
$(1, 1)$	→ 60
$(0, 2)$	→ 45

Lo anterior lo ilustramos, mediante los objetos geométricos que más estudiamos en este documento, en la siguiente figura.

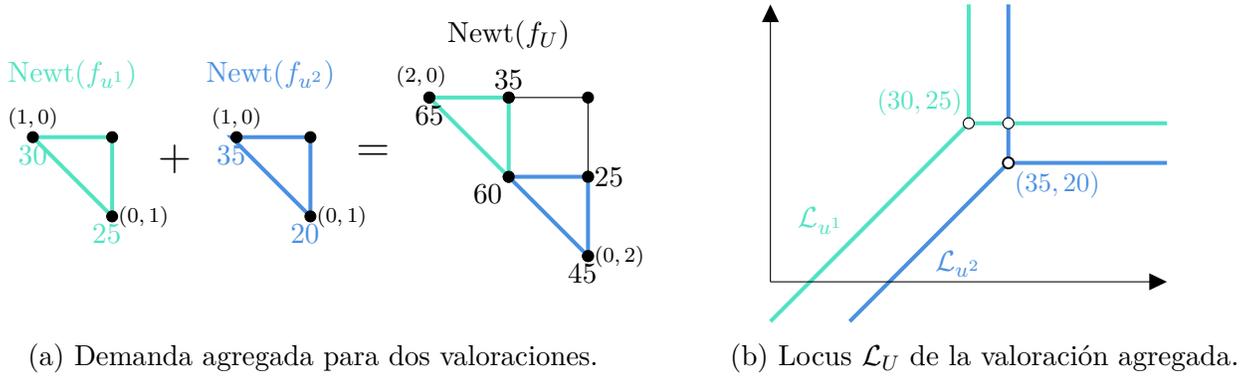


Figura 2.4: Ejemplo de demanda y valoración agregada.

Así, los dos amigos, en agregado, poseen la demanda  $D_U$  y la valoración  $U$ . Y para cada cesta podemos estudiar todos los precios a los que se está demandando.

### 2.3.2. Equilibrio competitivo

Estámos interesados en la existencia de *equilibrio competitivo* para agentes con tipo de demanda específicos.

**Definición 2.3.1.** *Un equilibrio competitivo para un conjunto finito de valoraciones  $\{u^j : j \in J\}$  y una oferta de mercado  $x \in \mathbb{Z}^n$  consiste de un precio  $p \in \mathbb{R}^n$  y asignaciones  $x^j$  tal que  $x = \sum_{j \in J} x^j$  y  $x^j \in D_{u^j}(p)$ .*

**Ejemplo 2.3.2.** *Una subasta product-mix corresponde a una ronda en que los agentes entregan su puja, consistente en una lista de valores a los que están dispuesto a pagar por cada una de las cestas del inventario en las que están interesados. Estas pujas se entregan selladamente y sin saber las pujas del resto de los agentes.*

*Notemos que una subasta de product-mix resulta existosa si existe una asignación de los productos subastados entre los agentes para la cual se logra vender todo el inventario. La existencia de dicha asignación es exactamente la existencia de un equilibrio competitivo. He ahí la importancia de la existencia de equilibrios competitivos en la teoría de subastas.*

Así, un equilibrio competitivo es definido por un precio  $p$  tal que la oferta  $x$  está en el conjunto de demanda agregada de las valoraciones, es decir,  $x \in D_U(p)$ . A estas cestas  $x$  que estén en la demanda agregada  $D_U(p)$  las llamaremos **cesta relevante** del inventario (u oferta).

La existencia de un equilibrio competitivo es equivalente a que el inventario se encuentre en la demanda agregada. En general no podemos inferir solo de la hipersuperficie agregada  $\mathcal{L}_U$  si hay una cesta que nunca se demanda en  $U$ . Por lo que esta sección proporciona condiciones que garantizan que la valoración agregada  $U(\cdot)$  es cóncava, sin tener que calcular explícitamente  $U(\cdot)$ .

El Lema 2.3.1 dice que la concavidad de una valoración agregada  $U$  (o que el conjunto  $D_U(p)$  sea discretamente convexo) es condición necesario y suficiente para que exista el equilibrio competitivo para todos los  $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$ , donde  $A$  es el dominio de  $U$ .

Definimos la concavidad de la valoración  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$  según la definición 1.1.6, esto es, una función discretamente cóncava. Precisamos estudiar la concavidad de las funciones de valoración, debido a que la concavidad en la valoración es suficiente para asegurar la existencia de equilibrio competitivo. También en el caso del teorema de unimodularidad 2.4.1, teorema que se verá en las secciones siguientes, las funciones de valoración individuales que se consideran son cóncavas. Es por esto que enunciamos el siguiente lema asociado a funciones cóncavas, que proporcionan importantes implicancias en futuros resultados.

**Lema 2.3.1.** *Sea  $u : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. a)  $u$  es cóncava.  
 b) Para todo  $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$  existe  $p$  tal que  $x \in D_u(p)$ .  
 c)  $D_u(p)$  es discretamente convexo  $\forall p$ .
2. Si  $\text{conc}(u)$  representa la envoltura cóncava de  $u$  entonces

$$D_{\text{conc}(u)}(p) = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_u(p))$$

para todo  $p \in \mathbb{R}^n$ .

Para ver en detalle este Lema y su demostración revise el Lemma 2.11 [Baldwin y Klemperer \(2019\)](#).

Recordemos que la función  $U$ , geoméricamente representa la función altura que define el techo del poliedro levantado  $P^U$  y que proyecta la subdivisión  $\text{SNewt}(f_U)$  donde  $P = \text{conv}(A)$ . Así que siempre que tengamos que todos los puntos levantados,  $\{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in A\}$  con  $A$  soporte de  $f_U$ , tocan el techo, entonces tendremos que existe un equilibrio competitivo para las cestas en  $A$ .

No es el caso que la concavidad de cada demanda individual implique concavidad de la demanda agregada. Basta considerar el contraejemplo que exponemos en la sección [A.3](#), donde dos agentes que poseen valoraciones discretamente cóncavas dan una valoración agregada no discretamente cóncava y, a pesar de tener equilibrio competitivo individualmente, no lo tienen agregadamente. Esto nos dice que el producto de polinomios tropicales cóncavos no es necesariamente cóncavo. Si  $U$  no es cóncava, entonces existe una cesta en el dominio de la valoración que nunca se demanda, es decir, hay un punto en el complejo de demanda que no alcanza a tocar el techo del poliedro levantado. Recordemos que los vértices de la subdivisión regular siempre alcanzan este techo, por lo tanto, los puntos problemáticos en el complejo de demanda, son aquellos que no son vértices.

Considere de nuevo el Ejemplo [2.3.1](#) y note que en la subdivisión,  $\text{SNewt}(f_U)$ , del politopo agregado  $\text{Newt}(f_U)$  tenemos que todas las 0-caras (i.e, vertices) alcanzan el techo del poliedro  $P^U$ , por lo tanto tendríamos equilibrio competitivo para todo  $p \in \mathbb{R}^n$ . Sin embargo, no debemos olvidar la interpretación económica. En el ejemplo se quería arrendar una casa con dos habitaciones, por lo que la oferta de mercado es la cesta  $(1, 1)$ . De esta manera, el equilibrio competitivo se cumple para todo  $p \in RDU_1$  tal que  $RDU_1$  es la región consistente en el interior relativo de la cara coloreada verde en el espacio de precios de la [Figura 2.5](#)

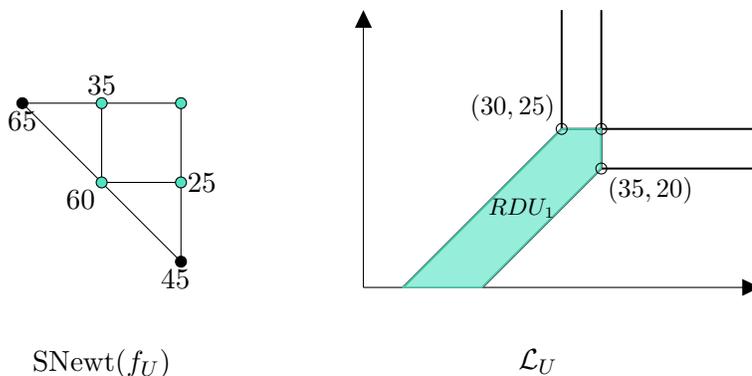


Figura 2.5: Posibles asignaciones, coloreadas, en  $\text{SNewt}(f_u)$ , para las que existe equilibrio competitivo y respetan el inventario del mercado (1 habitación mediana y una pequeña).

Terminamos esta sección con el Lema [2.3.2](#). Una caracterización para el equilibrio sobre una cara dada. Este lema muestra que el equilibrio competitivo es equivalente a verificar si la suma de Minkowski conmuta tomando puntos reticulados. [Danilov y otros \(2001\)](#) y

Danilov y Koshevoy (2004) usan este lema en la demostración de su versión del *teorema de unimodularidad*.

**Lema 2.3.2.** Sean  $u^1, \dots, u^J$  funciones de valoración cóncavas de  $J$  agentes, Sea  $U$  su función de valoración agregada. Para  $p \in \mathbb{R}^n$ , existe equilibrio competitivo en todo  $a \in D_U(p)$  si y solo si

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_U(p)) = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u^1}(p)) + \dots + \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u^J}(p)). \quad (2.6)$$

**Demostración.** Por definición tenemos que

$$D_U(p) = \sum_{j=1}^J D_{u^j}(p).$$

Cada valoración individual  $u^j$  es cóncava. Esto implica que cada valoración individual, evaluada en los puntos de su dominio, alcanza el techo de su poliedro levantado asociado, luego  $D_{u^j}(p) = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u^j}(p))$ . Así

$$D_U(p) = \sum_{j=1}^J \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u^j}(p)).$$

Ahora, usando el Lema 2.3.1, tenemos que

$$D_U(p) \text{ es discretamente convexo} \iff \forall a \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A), \exists p \text{ tal que } a \in D_U(p). \quad (2.7)$$

De esta forma (2.7) se reescribe

$$D_U(p) = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_U(p)) \iff \text{hay equilibrio en todo } a \in D_U(p). \quad (2.8)$$

Luego, hay equilibrio competitivo en todo  $a \in D_U(p)$  si y solo si (2.6). □

## 2.4. El teorema de unimodularidad

Esta sección provee un teorema que asegura que valoraciones con ciertos tipos de demanda específicos implican automáticamente un equilibrio competitivo. Nos dice exactamente qué tipos de demanda siempre tienen equilibrio competitivo. La clave será comprender qué tipos de demanda permiten que surjan potencialmente volúmenes *demasiado grandes* en el complejo de demanda.

**Definición 2.4.1.** Un conjunto  $\{v : v \in \mathbb{Z}^n\}$  es **unimodular** si todo subconjunto linealmente independiente puede extenderse a una base para  $\mathbb{R}^n$ , de vectores enteros, con determinante  $\pm 1$ .

Por ejemplo los conjuntos de columnas en las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

son unimodulares. Esto significa que en  $A$  y  $B$  cada subconjunto linealmente independiente puede extenderse a una base de  $\mathbb{R}^2$  con determinante  $\pm 1$ . Veamos que esto se cumple para  $A$  y para  $B$  será análogo. Para el vector columna  $a_1 = (1, 1)^t$  en  $A$  puede extenderse a una base para  $\mathbb{R}^2$  agregando el vector  $a_{11} = (1, 0)^t$ . Para el vector columna  $a_2 = (1, 2)^t$  en  $A$  puede extenderse a una base para  $\mathbb{R}^2$  agregando el vector  $a_{22} = (0, 1)^t$ . Y tenemos

$$\det(A) = 1 \quad , \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \quad \text{y} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

Esto verifica que cualquier subconjunto l.i de  $A$  puede extenderse a  $\mathbb{R}^2$  y así el conjunto  $D = \{(1, 1), (1, 2)\}$  es unimodular y a su vez  $A$  es una matriz modular.

**Teorema 2.4.1** (Teorema de Unimodularidad). *Existe un equilibrio competitivo para toda colección finita de funciones de valoración cóncavas,  $\{u^j : j \in J\}$ , con tipo de demanda  $\mathcal{D}$  ssi  $\mathcal{D}$  es unimodular.*

El teorema arriba es la formulación y enfoque dados por [Baldwin y Klemperer \(2019\)](#). Otra versión fue descubierta por [Danilov y otros \(2001\)](#), motivados por economías Walrasianas<sup>1</sup>. Para demostrarlo haremos uso del Lema 2.4.1, descubierto de manera independiente por [Howard \(2007\)](#).

**Lema 2.4.1.** *Sea  $\mathcal{D}$  conjunto unimodular. Si  $P$  y  $Q$  son politopos reticulados con direcciones de borde en  $\mathcal{D}$ , entonces*

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(P + Q) = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(P) + \text{conv}_{\mathbb{Z}}(Q). \quad (2.9)$$

**Demostración.** Asumimos, sin pérdida de generalidad, que  $\dim(P + Q) = n$ . Primero consideremos el caso cuando  $P$  y  $Q$  están contenidos en espacios afines complementarios, esto es equivalente a que  $\dim(P \cap Q) = 0$  y  $P$  es suma directa con  $Q$ .

$$\dim(P + Q) = \dim(P) + \dim(Q) \quad (2.10)$$

Sea  $B$  y  $C$  conjuntos l.i maximales de vectores primitivos de  $P$  y  $Q$  respectivamente. Entonces  $B \cup C$  es base de  $\mathbb{R}^n$ . Además  $B \cup C$  forma una  $\mathbb{Z}$ -base para  $\mathbb{Z}^n$  por ser  $\mathcal{D}$  unimodular. Con respecto a esta base,  $P$  y  $Q$  se encuentran en subespacios complementarios, entonces la suma de Minkowski  $P * Q$  coincide con el producto cartesiano  $P \times Q$ , y tenemos el resultado deseado.

Ahora, suponga que  $P$  y  $Q$  no son suma directa. Sea  $v \in \mathbb{R}^n$  un vector tal que las hipersuperficies tropicales duales a las subdivisiones regulares de  $P$  y  $Q$ ,  $\mathcal{T}_P$  y  $\mathcal{T}_Q - v$ , intersectan transversalmente, es decir, dos caras intersectan solo si la dimensión de su suma de minkowski es igual a  $n$ . Entonces la unión

$$\mathcal{T}_P \cup (\mathcal{T}_Q - v)$$

---

<sup>1</sup>La economía Walrasiana es basada en el equilibrio competitivo (también llamado equilibrio Walrasiano, en honor al economista francés Léon Walras). Walras fue el pionero en estudiar el equilibrio general para competencias perfectas. Es considerado como el fundador de la economía matemática por establecer la resolución de problemas matemáticos para dar solución a problemas económicos, [Walras \(1896\)](#).

es dual a la subdivisión de la suma de minkowski  $P + Q$ , cuyas caras tienen la forma

$$\{\sigma + \tau : \sigma \text{ es cara de } P, \tau \text{ es cara de } Q\}$$

donde caras  $\sigma \subseteq P$  y  $\tau \subseteq Q$  son de dimensión complementaria.

Sea  $a$  un punto reticulado en  $P + Q$ . Entonces  $a$  pertenece a una de sus caras  $\sigma + \tau$ . Como  $\sigma$  y  $\tau$  son caras de  $P$  y  $Q$ , las direcciones de sus bordes también están en  $\mathcal{D}$ . El mismo argumento anterior da  $\sigma + \tau = \sigma \times \tau$  y por esto

$$(\sigma + \tau) \cap \mathbb{Z}^n = (\sigma \cap \mathbb{Z}^n) + (\tau \cap \mathbb{Z}^n),$$

que da  $a \in (\sigma \cap \mathbb{Z}^n) + (\tau \cap \mathbb{Z}^n)$  □

**Demostración.**[Teorema Unimodularidad 2.4.1] Suponga que  $\mathcal{D}$  es unimodular y que las valoraciones  $w^j : A^j \rightarrow \mathbb{R}$  son cóncavas de tipo de demanda  $\mathcal{D}$ . Para cada  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $\text{conv}(D_{w^j}(p))$  son politopos reticulados con direcciones de sus bordes en  $\mathcal{D}$ . Por los Lemas 2.3.2 y 2.4.1 existe equilibrio competitivo para todos los puntos en  $D_U(p)$ . Luego existe equilibrio competitivo.

Por el contrario, suponga que  $\mathcal{D}$  no es unimodular. Necesitamos construir una colección  $\{w^j : j \in J\}$  con tipo de demanda  $\mathcal{D}$  sin equilibrio competitivo. Consideremos las valoraciones de manera trivial, es decir, cero en sus soportes y  $-\infty$  en el resto. Por el Lema 2.3.2 es suficiente demostrar que existen  $A^1, \dots, A^r \subseteq \mathbb{Z}^n$  con bordes de direcciones en  $\mathcal{D}$ ,  $A^j = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A^j)$ , y tales que  $\sum_j A^j \subseteq \text{conv}_{\mathbb{Z}}(\sum_j A^j)$ . Como  $\mathcal{D}$  no es unimodular, existen vectores l.i  $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{D}$  donde  $\text{span}_{\mathbb{Z}}\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ . Sea  $A^j = \{o, v_j\}$ . Entonces  $A^1 + \dots + A^n$  consta de los vértices del poliedro de aristas  $v_1, \dots, v_n$ , pero  $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A^1 + \dots + A^n)$  consta de otros puntos reticulados por la no-unimodularidad □.

## Capítulo 3

# Análisis de la Perturbación de una Preferencia

El objetivo de este capítulo es estudiar nuevos objetos de la geometría tropical, en un contexto de *geometría tropical de rango mayor*. Utilizaremos esta noción de rango mayor para definir polinomios de rango mayor con coeficientes en el espacio tropical  $\mathbb{T}_k$  de rango  $k$  y vislumbrar que estas inducen una perturbación en el polinomio y vice versa. Seguimos considerando la asignación de  $n$  tipos de bienes entre una colección finita  $J$  de agentes con las valoraciones

$$u_j : A_j \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}, j \in J$$

ya vistas. pretendemos estudiar cómo varía la demanda agregada cuando las valoraciones de los agentes se ven infinitesimalmente perturbadas.

### 3.1. La perturbación de valuaciones y el teorema de hemicontinuidad de la demanda

Nuestro primer resultado corresponde a una observación de caracter topológico de la demanda  $D_u(p)$  vista como una función de las variables  $u$  y  $p$ .

**Definición 3.1.1.** *El espacio de valorización de soporte  $A$  es el conjunto  $\text{Val}(A) = \{u : A \rightarrow \mathbb{R}\}$  de todas las funciones reales con dominio  $A$ .*

Note que  $\text{Val}(A) = \mathbb{R}^A$  y por tanto  $\text{Val}(A)$  es un espacio vectorial de dimensión finita con una topología Euclidiana a la cual nos podemos referir.

**Teorema 3.1.1** (Hemicontinuidad superior de la demanda). *Dado  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$  finito y un vector de precios  $p \in \mathbb{R}^n$  fijo, la función*

$$\begin{aligned} D : \text{Val}(A) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z}^n) \\ (u, p) &\mapsto D_u(p) \end{aligned}$$

*es hemicontinua superior, es decir, para toda valoración  $u \in \text{Val}(A)$  y todo vector de precios  $p \in \mathbb{R}^n$  existe una vecindad abierta  $V \subseteq \text{Val}(A) \times \mathbb{R}^n$  de  $(u, p)$  conteniendo  $u$  tal que*

$\forall (u', p') \in V$  se tiene

$$D_{u'}(p') \subseteq D_u(p). \quad (3.1)$$

En otras palabras, al perturbar ligeramente tanto la valoración como los precios, el agente solo puede perder interés en adquirir ciertas cestas, pero no puede ganar interés en adquirir nuevas.

**Demostración.** Supongamos, por contradicción, que no existe tal vecindad. Entonces, para toda vecindad abierta  $V$  de  $(u, p)$  existen  $(u', p') \in V$  para los cuales hay una cesta  $x \in D_{u'}(p')$  tal que  $x \notin D_u(p)$ .

Ahora tomemos una sucesión  $V_n$  de vecindades encajonadas de  $(u, p)$ , tales que

$$\bigcap_n V_n = \{(u, p)\}$$

. Para cada  $n$  existen  $(u_n, p_n) \in V_n$  y  $x_n \in D_{p_n}(u_n)$  de forma que  $x_n \notin D_p(u)$ . Como el conjunto  $A$  es finito, cambiando  $V_n$  por una subsucesión de ser necesario, podemos suponer que todos los  $x_n$  son iguales a una cesta  $x \in A$  fija. Ahora como  $x \in D_{p_n}(u_n)$  tenemos que

$$u_n(x) - \langle x, p_n \rangle \geq u_n(y) - \langle y, p_n \rangle, \quad \forall y \in A. \quad (3.2)$$

Tomando el límite en (3.2) cuando  $n$  tiende a infinito, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$  tenemos que

$$u(x) - \langle x, p \rangle \geq u(y) - \langle y, p \rangle, \quad \forall y \in A. \quad (3.3)$$

Y así  $x \in D_u(p)$ , contradicción.  $\square$

El siguiente corolario es inmediato

**Corolario 3.1.1.** *Sea  $x$  un inventario que debe ser repartido entre una familia de agentes  $I$  con valorizaciones  $\{u_i\}_{i \in I}$  a un precio  $p$ . Sean  $\{u'_i\}_{i \in I}$  y  $p'$  una perturbación de las valorizaciones de los agentes en  $I$  y del precio  $p$ .*

*Luego, si el equilibrio competitivo falla para  $\{u_i\}_{i \in I}$  y  $p$ , entonces el equilibrio competitivo falla para  $\{u'_i\}_{i \in I}$  y  $p'$ .*

Comentamos que el Teorema 3.1.1 recién enunciado es nuevo hasta donde pudimos comprobar. Sin embargo, existen otros resultados similares sobre la hemicontinuidad de la demanda en la literatura. Dada una valoración fija, la hemicontinuidad de la demanda respecto al precio puede ser deducida fácilmente de la teoría de la teoría de dualidad entre complejo de demanda y complejo de precios según [Baldwin y Klemperer \(2019\)](#), por ejemplo ver el Lema 1.3.1. Por otro lado, usando el teorema del máximo de Berge's, la hemicontinuidad de la demanda modelada de forma distinta en términos del precio de los productos y el ingreso de los agentes es vista en [Ok \(2004\)](#).

### 3.1.1. El problema de describir la variación de la demanda

El teorema de hemicontinuidad introducido en esta sección nos dice que la demanda decrece ante perturbaciones, pero no nos dice como. La pregunta crucial para el resto del capítulo es:

- (★) ¿Es posible entender exactamente como decrece la demanda al aplicar una perturbación del precio y de la valoración? ¿Es posible dar un algoritmo para comprender exactamente dicho cambio?

Como veremos en este capítulo, la respuesta es que sí existe dicho algoritmo para perturbaciones de la forma  $u + \delta u'$  y  $p + \delta p'$  con  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  pequeño, o más generalmente perturbaciones de la forma

$$\begin{aligned} u^{(1)} + \delta u^{(2)} + \delta^2 u^{(3)} + \dots + \delta^{k-1} u^{(k)} \\ p^{(1)} + \delta p^{(2)} + \delta^2 p^{(3)} + \dots + \delta^{k-1} p^{(k)}. \end{aligned}$$

donde  $\delta$  es un número pequeño (posiblemente cero, en cuyo caso se reduce la expresión) y  $u^{(1)}, p^{(1)}$  son la valoración y el precio iniciales en los que estamos interesados aplicar la perturbación.

La descripción explícita de la demanda está dada por el Teorema 3.3.2 en la sección 3.3 y sera una consecuencia del Teorema de dualidad de rango mayor 3.2.1 de la sección 3.2.

## 3.2. Geometría tropical de rango superior

Esta sección introduce una generalización de la geometría tropical tratada en el primer capítulo, esta es llamada la geometría tropical de rango superior. En ella, alteramos la definición del semianillo tropical  $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$  cambiando  $\mathbb{R}$  por el grupo aditivo totalmente ordenado  $\mathbb{R}^k$ , donde el orden que consideramos es el *lexicográfico* o del *diccionario*. En este contexto, los elementos de  $\mathbb{R}^k$  serán tratados como números de rango  $k$  y serán utilizados como coeficientes en polinomios o para construir valoraciones lexicográficas en economía. Para evitar pensar en  $\mathbb{R}^k$  de la forma geométrica usual lo denotaremos con un subíndice  $\mathbb{R}_k$ .

Con la idea de entender la geometría tropical de rango superior como una *teoría de perturbaciones*, introducimos también el anillo  $\mathbb{D}$  de los *número duales* y su correspondiente generalización  $\mathbb{D}_k$  de rango  $k$ . Este es el anillo consistente en los elementos de la forma  $a + \varepsilon b$  donde  $\varepsilon$  debe ser considerado meramente como un símbolo o una variable tal que su cuadrado es 0. Heurísticamente debemos considerar a  $\varepsilon$  como un número mayor que 0 pero menor que todo número real positivo, esto es, un infinitesimal. De esta forma,  $\mathbb{D}$  posee de forma natural el orden lexicográfico y se vuelve isomorfo, como grupo aditivo ordenado a  $\mathbb{R}^2$ . Equivalentemente,  $\mathbb{D}_k$  corresponde con el grupo aditivo  $\mathbb{R}_k$ .

Desde este punto de vista, los resultados probados en esta sección nos dan una teoría de perturbaciones para la geometría tropical usual, que será el ingrediente necesario para estudiar la perturbación de la demanda en la siguiente sección.

### 3.2.1. El semianillo tropical de rango superior y los números duales generalizados

La geometría tropical de rango superior es una geometría basada en el **semianillo tropical de rango  $k$**  denotado por  $\mathbb{T}_k = (\mathbb{R}_k \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$  que es el sistema numérico

consistente en el grupo aditivo  $\mathbb{R}_k = (\mathbb{R}^k, +)$  equipado con el **orden lexicográfico**, definido por

$$(a_1, \dots, a_k) \prec (b_1, \dots, b_k) \iff a_i < b_i \text{ para el mínimo } i \text{ tal que } a_i \neq b_i \quad (3.4)$$

junto con el elemento  $-\infty$  y las operaciones  $\oplus$  y  $\odot$ , que están definidas de forma análoga a como se hace con el semianillo tropical  $\mathbb{T}$ . Usaremos la notación

$$a = (a^{(1)}, \dots, a^{(k)}) \in \mathbb{T}_k$$

para denotar un elemento de  $\mathbb{T}_k$ .

Note que  $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}$  y que, dado un entero  $1 \leq r \leq k$ , tenemos una proyección  $\pi_r$  definida por

$$\begin{aligned} \pi_r : \mathbb{T}_k &\longrightarrow \mathbb{T}_r \\ a &\longmapsto (a^{(1)}, \dots, a^{(r)}) \end{aligned}$$

es posible ajustar todas las proyecciones a los semianillos de rango inferiores. En este sentido definimos el **elemento truncado**, dado por

$$a^{[i]} := \pi_i(a).$$

A continuación, introducimos el concepto de *números duales*, que nos darán la conexión con el estudio de las perturbaciones.

**Definición 3.2.1.** *El anillo de los números duales es el conjunto*

$$\mathbb{D} = \{a + \varepsilon b : a, b \in \mathbb{R}\}$$

*junto con la suma usual, el orden lexicográfico y el producto*

$$(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) := ac + (ad + bc)\varepsilon.$$

Como grupo ordenado tenemos  $\mathbb{R}_2 \cong \mathbb{D}$ . Un elemento  $(a, b) \in \mathbb{C}$  puede escribirse de la forma no vectorial  $a + bi$ , dando al número una parte real  $a$  e imaginaria  $b$ . En analogía con esta idea, un número  $(a, b) \in \mathbb{R}_2$  puede ser escrito en la forma  $a + \varepsilon b \in \mathbb{D}$ , los números duales poseer una parte real

$$\Re(\underline{a}) = a^{(1)} \quad (3.5)$$

y una parte nilpotente

$$\mathfrak{Nil}_i(\underline{a}) = a^{(i+1)} \quad (3.6)$$

De esta forma introducimos una nueva forma de escribir elementos en  $\mathbb{R}_2$  y, por consiguiente, elementos en  $\mathbb{T}_k = (\mathbb{D}_k \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ .

Extendemos este enfoque al caso de rango  $k$ .

**Definición 3.2.2.** *Se define el anillo generalizado de números duales de rango  $k$  como el conjunto*

$$\mathbb{D} = \{a^{(1)} + a^{(2)}\varepsilon + \dots + a^{(k)}\varepsilon^{k-1} : a^{(i)} \in \mathbb{R}\}$$

*junto con el orden lexicográfico, la suma y el producto usual de polinomios, con la salvedad de que  $\varepsilon^k = 0$ .*

La manipulación de expresiones en  $\mathbb{D}$  se hace de la misma forma que la manipulación de aproximaciones de Taylor

$$f(x) + hf'(x) + \cdots + h^k f^{(k)}(x)/k! + o(h^k),$$

uno suma y multiplica de la manera usual y luego elimina los términos donde  $h$  tiene exponente mayor a  $k$ .

Tenemos  $\mathbb{D} = \mathbb{D}_2$  y, al igual que antes, tenemos  $\mathbb{D}_k \cong \mathbb{R}_k$  como grupo ordenado aditivo. Notemos sin embargo que  $\mathbb{D}_k$  tiene naturalmente una multiplicación que  $\mathbb{R}_k$  no posee.

Con el punto de vista de los números duales, tenemos que un elemento  $a \in \mathbb{T}_k$  tiene la forma

$$a = a^{(1)} + a^{(2)}\varepsilon + \cdots + a^{(k)}\varepsilon^{k-1}.$$

En analogía al caso de rango dos, un elemento  $a \in \mathbb{D}_k$  posee una **parte real** que consiste en la primera coordenada, denotada por

$$\Re(\underline{a}) = a^{(1)} \quad (3.7)$$

y  $(k-1)$ -**partes nilpotentes** que consisten en las coordenadas siguientes y las denotamos por

$$\Im_i(\underline{a}) = a^{(i+1)}, \quad 2 \leq i \leq n \quad (3.8)$$

para  $1 \leq i \leq k$ . Notemos que, podemos ajustar todas las proyecciones a todos los anillos de rangos inferiores en la siguiente secuencia

$$\mathbb{D}_k := \mathbb{D}_k \xrightarrow{\pi_{k-1}} \mathbb{D}_{k-1} \xrightarrow{\pi_{k-2}} \cdots \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{D}_1 \quad (3.9)$$

El hecho de que  $\mathbb{D}_k$  sea un anillo ordenado nos permite generalizar las nociones de geometría poliedral al contexto de los números duales generalizados.

### Definición 3.2.3.

1. Para  $y \in \mathbb{D}_k^n$  y  $a \in \mathbb{D}_k$ , un **semiespacio** es un subconjunto de  $\mathbb{D}_k^n$  de la forma

$$H_{y \succ a} := \{x \in \mathbb{D}_k^n : \langle y, x \rangle \succ a\}.$$

Un **hiperplano** es el conjunto  $H_{y=a} = H_{y \succ a} \cap H_{y \prec a}$ .

2. Un **poliedro** es una intersección finita y no vacía de semiespacios.
3. El conjunto

$$\text{conv}_{\mathbb{D}_k}(u_1, \dots, u_r) := \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i : u_i \in U, \lambda_i \in \mathbb{D}_{\geq 0}, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \right\}$$

es llamado **politopo**.

Usted puede advertir que muchas nociones van siendo análogas a rango 1. En este sentido, una **cara** de un poliedro  $P$  es la intersección de  $P$  con un hiperplano que contiene a  $P$  en uno de sus semiespacios.

La geometría poliedral así definida satisface las versiones correspondientes de los teoremas usuales de la geometría poliedral, como un Lema de Farkas o una teoría de dualidad. Ver [Iriarte \(2022\)](#) para más detalles.

### 3.2.2. Fibraciones iteradas y subdivisiones regulares por capas

El objetivo ahora es extender la noción de hipersuperficie tropical y la subdivisión del politopo de Newton al semianillo  $\mathbb{T}_k$ . En este caso, el punto de vista que consideramos es el de las fibraciones iteradas para la hipersuperficie tropical y el de las subdivisiones por capas para el politopo de Newton. Introducimos a continuación la primera de estas nociones.

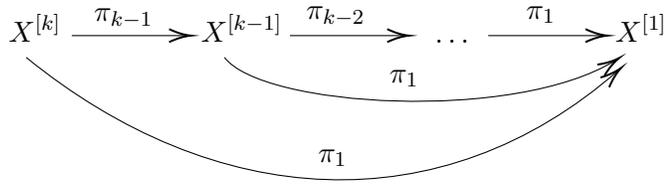
**Definición 3.2.4.** Una **fibración iterada** de  $\mathbb{R}^n$  es un diagrama de conjuntos de la forma

$$X^{[k]} \xrightarrow{\pi_{k-1}} X^{[k-1]} \xrightarrow{\pi_{k-2}} \dots \xrightarrow{\pi_1} X^{[1]} \quad (3.10)$$

donde cada mapeo  $\pi_r : \mathbb{R}_k \rightarrow \mathbb{R}_r$  es sobreyectivo,  $X^{[1]} \subseteq \mathbb{R}^n$  y para cada  $x \in X^{[i]}$ , la fibra  $\pi_i^{-1}(x)$  puede ser identificada con un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , denotado  $X_x^{[i+1]}$ .

Notemos que, dado un rango  $k$  y  $1 < r \leq k$ , cualquier fibración  $X^{[r]}$  se proyecta directamente a un  $X^{[i]}$  con  $i \leq r$ . Por ejemplo, todas las fibraciones pueden ajustarse a la fibración  $X^{[1]}$  en el sentido

Un ejemplo de fibración iterada está dado por un poliedro en  $\mathbb{D}_k$ , como veremos a continuación.



**Ejemplo 3.2.1.** Considere funcionales lineales  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  en  $\mathbb{D}^2$  y valores  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{D}$  tal que definen los subespacios

$$\begin{aligned} H_{\varphi_1 \leq a_1} &= \{(x, y) \in \mathbb{D}^2 : x + y \leq 1 + 2\varepsilon\} \\ H_{\varphi_2 \geq a_2} &= \{(x, y) \in \mathbb{D}^2 : x \geq 0 + 3\varepsilon\} \\ H_{\varphi_2 \geq a_3} &= \{(x, y) \in \mathbb{D}^2 : y \geq 0 + 4\varepsilon\} \end{aligned}$$

De esta manera la intersección de semiespacios  $P = H_{\varphi_1 \leq a_1} \cap H_{\varphi_2 \geq a_2} \cap H_{\varphi_2 \geq a_3}$  es el poliedro de vértices  $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ . Podemos calcular las posibles fibras de  $P$  en rango 2 cuando los funcionales  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  y los valores  $a_1, a_2, a_3$  cumplan con la igualdad, respectivamente, en la primera coordenada. En otras palabras,

$$\Re(\varphi_j) = \Re(a_j) \Rightarrow [\mathfrak{Nil}(\varphi_1) \leq \mathfrak{Nil}(a_1)] \wedge [\mathfrak{Nil}(\varphi_2) \geq \mathfrak{Nil}(a_2)] \wedge [\mathfrak{Nil}(\varphi_3) \geq \mathfrak{Nil}(a_3)]$$

de esta forma, según el orden lexicográfico, pasamos a la segunda coordenada. Esto nos da las siguientes fibras

$$\mathbb{R}^2, F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 2\}, F_2 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}, F_3 = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 4\}$$

y las fibras  $F_1 \cap F_2, F_1 \cap F_3, F_2 \cap F_3$  relativas a los vértices de  $P$ . Esto depende del punto que tomemos en  $P^{[1]}$  y la Figura 3.1 lo ilustra.

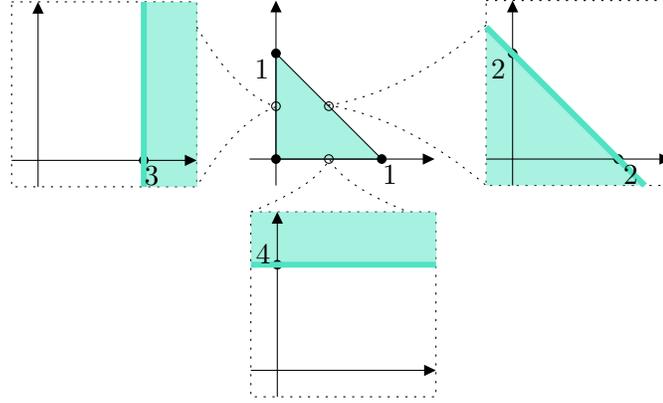


Figura 3.1: Ejemplo de una fibración de rango 2.

Una observación a considerar es que la fibra es constante mientras  $(x, y) \in \mathbb{D}^2$  varía en el interior relativo de la cara asociada.

**Definición 3.2.5.** Considere un subconjunto finito  $A \subseteq \mathbb{D}_k^n$  y el politopo  $P = \text{conv}_{\mathbb{D}_k}(A)$ , llamamos **función altura** a  $u : A \rightarrow \mathbb{D}_k$  que asocia un número dual de orden  $k$  para cada elemento en  $A$ .

1. Definimos el **poliedro levantado**

$$P^u := \text{conv}_{\mathbb{D}_k} \{(x, u(x)) \in \mathbb{D}_k^n \times \mathbb{D}_k : x \in A\} \subseteq \mathbb{D}_k^n \times \mathbb{D}_k.$$

2. La **subdivisión regular** de  $P$  inducida por  $u$ , denotada por  $\Delta^u(P)$ , es la colección

$$\Delta^u(P) := \{\pi(F) : F \text{ es una cara superior de } P^u\}$$

donde  $\pi : \mathbb{D}_k^n \times \mathbb{D}_k \rightarrow \mathbb{D}_k^n$  es la proyección de las caras superiores de  $P^u$  en  $\mathbb{D}_k^n$ .

Notemos que la función altura devuelve valores en  $\mathbb{D}_k$  de la forma

$$u(a) = u^{(1)}(a) + \dots + u^{(k)}(a)\varepsilon^{k-1}, \quad \text{para cada } a \in A \subseteq \mathbb{D}_k^n.$$

Por lo tanto para cada  $i$  tal que  $1 \leq i \leq k$ , los valores  $\{u^{[i]}(\alpha) : \alpha \in A\}$  inducen en  $P = \text{conv}_{\mathbb{R}}(A)$  una subdivisión diferente. En este sentido vamos a construir una **subdivisión regular por capas**

$$\underline{\Delta}^u(P) : \Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \dots \leq \Delta_k$$

de la siguiente manera

$$\Delta_1 := \text{subdivisión regular de } \text{conv}_{\mathbb{R}}(A) \text{ inducida por } \{u^{(1)}(\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

$\vdots$

$$\Delta_k := \text{subdividimos cada cara } \sigma \text{ de } \Delta_{k-1} \text{ bajo la subdivisión regular inducida por } \{u^{(k)}(\alpha)\}_{\alpha \in \sigma}$$

Ilustremos lo que está pasando geoméricamente. Consideremos el ejemplo a continuación como una extensión del Ejemplo 1.1.3 donde construimos la subdivisión regular para la envoltura convexa del subconjunto

$$A = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 1)\}$$

inducida para una función altura que devolvía valores en un espacio de rango 1.

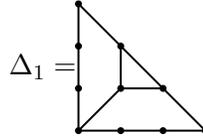
**Ejemplo 3.2.2.** Consideremos ahora la función altura  $u : A \rightarrow \mathbb{D}_3$  tal que

$$\begin{array}{lll} u(0,0) = 1 + 1\varepsilon + 1\varepsilon^2 & u(0,1) = 1 + 2\varepsilon + 1\varepsilon^2 & u(2,1) = 2 + 2\varepsilon + 1\varepsilon^2 \\ u(1,0) = 1 + 2\varepsilon + 1\varepsilon^2 & u(0,2) = 1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 & u(1,1) = 2 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^2. \\ u(2,0) = 1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 & u(0,3) = 1 + 1\varepsilon + 1\varepsilon^2 & \\ u(3,0) = 1 + 1\varepsilon + 1\varepsilon^2 & u(1,2) = 2 + 2\varepsilon + 1\varepsilon^2 & \end{array}$$

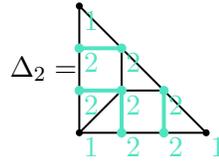
Subdividimos  $P = \text{conv}_{\mathbb{R}}(A)$  bajo la función altura

$$\begin{aligned} u : A &\rightarrow \mathbb{D}_3 \\ \alpha &\mapsto u(\alpha) = u_1(\alpha) + u_2(\alpha)\varepsilon + u_3(\alpha)\varepsilon^2 \end{aligned}$$

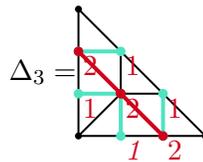
y así  $P$ , considerando las alturas  $\{u^{(1)}(\alpha) : \alpha \in A\}$ , posee una primera subdivisión que ya calculamos en el ejemplo que partimos refiriendo y es



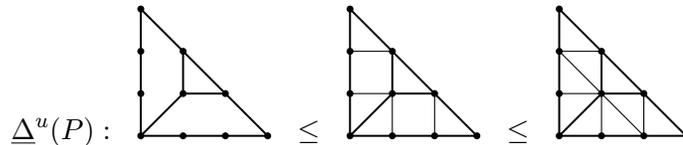
para calcular  $\Delta_2$  subdividimos cada cara  $\sigma \in \Delta_1$  según las alturas  $\{u^{(2)}(\alpha) : \alpha \in A\}$ . De esta forma la segunda capa de la subdivisión es



Terminamos calculando  $\Delta_3$  subdividiendo las caras de  $\Delta_2$  según las alturas  $\{u^{(3)}(\alpha) : \alpha \in A\}$ . Así la tercera capa de la subdivisión es



Luego  $P$  posee una subdivisión regular por capas, inducida por la función  $u : A \rightarrow \mathbb{D}_3$ , y esta es



Considere a continuación una proposición que nos asegura la equivalencia en la forma de construir una subdivisiones regulares por capas. Puede revisar esta proposición y su demostración en [Iriarte \(2022\)](#) (Proposition 1.13.3)

**Proposición 3.2.1** (Subdivisiones Regulares por Capas). *Sea  $u : A \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{D}$  la función altura*

$$\begin{aligned} u : A &\longrightarrow \mathbb{D}_k \\ a &\longmapsto u(a) = u^{(1)}(a) + \cdots + \varepsilon^{k-1} a^{(k)}(a). \end{aligned}$$

Podemos construir una subdivisión por capas de  $\text{conv}(A)$

$$\underline{\Delta}^u(\text{conv}(A)) : \Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \cdots \leq \Delta_k \quad (3.11)$$

en las siguientes formas equivalentes:

1.  $\Delta_1$  es la subdivisión regular de  $\text{conv}(A)$  inducida por  $u^{(1)}$  y, para  $1 < i \leq k$ ,  $\Delta_i$  es la subdivisión regular de  $\Delta_{i-1}$  obtenida por la subdivisión de cara cara  $\delta \in \Delta_i$  por la subdivisión regular inducida por la función altura restringida

$$\begin{aligned} u^{(i)}|_{\delta} : \delta \cap A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto u^{(i)}(y). \end{aligned}$$

2.  $\Delta_i$  es la subdivisión regular definida por la función altura

$$u^{(1)} + \delta u^{(2)} + \cdots + \delta^{k-1} u^{(k)} : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

para  $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  suficientemente pequeño.

3. Dado un elemento  $x \in \mathbb{D}_k^n$ , para cada  $1 \leq i \leq k$  considere el conjunto

$$D_u^i(x) := \text{argmax}_{a \in A} \{u^{[i]}(a) + \langle a, x^{[i]} \rangle\} \subseteq A.$$

Esto es,  $D_u^i(x)$  es el conjunto de todos los  $a \in A$  para los cuales la expresión  $u^{[i]}(a) + \langle a, x^{[i]} \rangle$  es maximal. La subdivisión  $\Delta_i$  es el complejo poliedral donde sus poliedros son de la forma  $\text{conv}(D_u^i(x))$  para algún  $x \in \mathbb{D}_k^n$ .

Más aún, la igualdad entre las celulas de los complejos 2. y 3. proviene de la igualdad

$$D_u^i(x) = D_{u^{(1)} + \delta u^{(2)} + \cdots + \delta^{i-1} u^{(i)}}(x^{(1)} + \delta x^{(2)} + \cdots + \delta^{i-1} x^{(i)})$$

que es cierta para todo  $\delta > 0$  suficientemente pequeño.

### 3.2.3. Hipersuperficies tropicales y politopos de Newton

**Definición 3.2.6.** *Definimos un polinomio tropical de rango  $k$  (de Laurent) con soporte  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$  como*

$$p := \bigoplus_{m \in A} c_m \odot x^m \in \mathbb{T}_k[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}].$$

Donde  $A$  es el conjunto  $\{m \in \mathbb{Z}^n : c_m \neq -\infty\}$ .

El polinomio tropical de rango  $k$  induce la función tropical de rango  $k$

$$p : (\mathbb{D}_k)^n \longrightarrow \mathbb{D}_k$$

$$x \longmapsto \max_{m \in A} \{c_m + \langle m, x \rangle\}$$

Esta función, al igual que en rango 1, es importante para entender el polinomio pero no lo caracteriza. Notemos cómo actúa la proyección  $\pi$ , en el siguiente diagrama conmutativo, cuando la evaluamos en un polinomio tropical de rango  $k$ .

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{D}_k)^n & \xrightarrow{p} & \mathbb{D}_k \\ & \searrow \pi_r \circ p & \downarrow \pi_r \\ & & \mathbb{D}_r \end{array}$$

Así, la proyección de un polinomio tropical devuelve valores en el espacio  $\mathbb{D}_r$ . Un polinomio tropical  $p$  se anula en el punto  $a \in (\mathbb{D}_k)^n$  si el máximo en  $p(a)$  se alcanza al menos dos veces. Si  $p$  es un polinomio tropical que se anula en  $a$ , decimos que  $a$  es un *cerro* de  $p$ . A continuación se define el lugar geométrico de todos los anuladores de  $p$ .

**Definición 3.2.7.** Sea  $p$  un polinomio tropical de rango  $k$ . La **hipersuperficie tropical de rango  $k$**  de  $p$  es un conjunto  $\mathcal{T}(p) \subseteq (\mathbb{D}_k)^n$  de anuladores de  $p$  definido por

$$\mathcal{T}(p) := \{x \in (\mathbb{D}_k)^n : \text{El máximo en } p(x) \text{ se alcanza al menos dos veces}\}.$$

Así, es natural pensar en que un hipersuperficie tropical posee de manera natural una fibración iterada.

**Proposición 3.2.2.** Considere un polinomio tropical  $p \in \mathbb{T}_k[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$ , la imagen de  $\mathcal{T}(p^{[i]})$  bajo  $(\mathbb{D}_{i+1})^n \rightarrow (\mathbb{D}_i)^n$  se mapea a  $\mathcal{T}(p^{[i-1]})$ . Luego tenemos la fibración iterada

$$\mathcal{T}(p^{[k]}) \rightarrow \mathcal{T}(p^{[k-1]}) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{T}(p^{[1]}).$$

Dado un punto  $x \in \mathcal{T}(p^{[i]})$  denotamos por  $\mathcal{T}_x(p^{[i+1]})$  la fibra de  $\mathcal{T}(p)$  relativa a  $x$  en la fibración.

**Demostración.** Sea  $x \in (\mathbb{D}_i)^n$ . Si  $x \in \mathcal{T}(p^{[i]})$  se alcanza el máximo en  $p^{[i]}(x)$  al menos dos veces, entonces existen  $j, k \in \mathbb{N}$  con  $j \neq k$  y  $m_j, m_k \in \text{supp}(p^{[i]})$  tal que

$$c_{m_j} + \langle x, m_j \rangle = c_{m_k} + \langle x, m_k \rangle \geq c_{m_t} + \langle x, m_t \rangle$$

$\forall t \in \mathbb{N} \setminus \{j, k\}$  tal que  $m_t \in \text{supp}(p^{[i]})$ . Esto implica

$$\pi_{i-1}(c_{m_j}) + \langle \pi_{i-1}(x), m_j \rangle = \pi_{i-1}(c_{m_k}) + \langle \pi_{i-1}(x), m_k \rangle \geq \pi_{i-1}(c_{m_t}) + \langle \pi_{i-1}(x), m_t \rangle$$

Lo último nos dice que el valor  $\pi_{i-1}(x)$  es un anulador para el polinomio  $\pi_{i-1}(p^{[i]})$  y luego  $\pi_{i-1}(x) \in \mathcal{T}(\pi_{i-1}(p^{[i]}))$ .

□

Introducimos el politopo de newton de un polinomio tropical de rango mayor y su correspondiente subdivision regular.

**Definición 3.2.8.** Sea  $p \in \mathbb{T}_k[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$  con soporte  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ . El **politopo de Newton** de  $p$  sobre  $\mathbb{D}_k$  es

$$\text{Newt}(p) := \text{conv}_{\mathbb{D}_k}(A) \subseteq (\mathbb{D}_k)^n.$$

Notemos que, de manera análoga al primer capítulo, un polinomio tropical posee de forma natural una subdivisión inducida por sus coeficientes. Esta es la subdivisión regular dada por la función altura

$$\begin{aligned} u : \text{Newt}(p) \cap \mathbb{Z}^n &\longrightarrow \mathbb{D}_k \cup \{-\infty\} \\ m &\longmapsto c_m \end{aligned}$$

que en este caso es una subdivisión por capas que denotaremos por

$$\underline{\Delta}(p) = \Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \dots \leq \Delta_k.$$

En este sentido, tenemos el siguiente teorema, análogo al teorema de dualidad ya visto en el capítulo anterior, que relaciona la hipersuperficie regular de un polinomio tropical de rango mayor con su correspondiente subdivisión por capas del politopo de Newton.

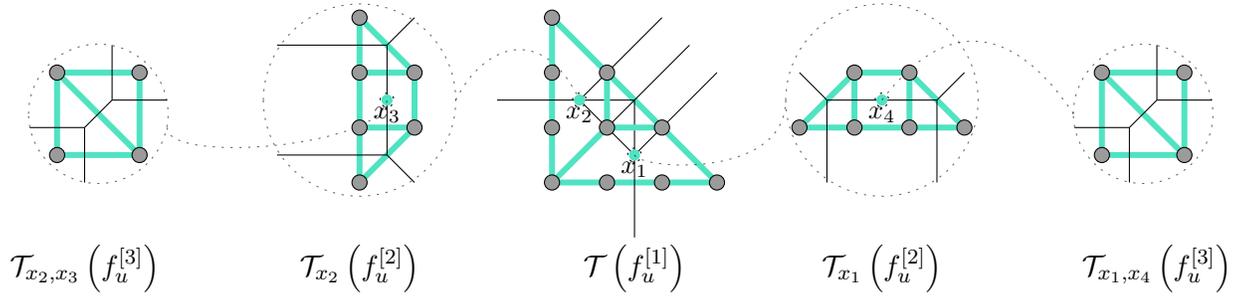
**Teorema 3.2.1** (Dualidad en Rango Mayor). Sea  $p \in \mathbb{T}_k[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$  y considere la subdivisión regular por capas de su politopo de Newton

$$\underline{\Delta}(p) = \Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \dots \leq \Delta_k.$$

Entonces, tenemos que:

1. La base  $\mathcal{T}(p^{[1]})$  es una hipersuperficie tropical de rango uno con la estructura de complejo poliedral dual a la primera subdivisión  $\Delta_1$ .
2. Para cada  $x \in \mathcal{T}(p^{[1]})$ , la fibra  $\mathcal{T}_x(p^{[2]})$  es también una hipersuperficie tropical de rango uno. Además,  $\mathcal{T}_x(p^{[2]})$  permanece constante cuando  $x$  varía en el interior de una célula  $C(F) \subseteq \mathcal{T}(p^{[1]})$  para algún  $F \in \Delta_2$  y el tipo normal de  $\mathcal{T}_x(p^{[2]})$  es dual a la subdivisión  $\Delta_2$  restringida a  $F$ .
3. De manera general, para cada  $x \in \mathcal{T}(p^{[i]})$ , la fibra  $\mathcal{T}_x(p^{[i+1]})$  es también una hipersuperficie tropical de rango uno. Esta se mantiene constante cuando  $x$  varía en el interior de una célula  $C(F) \subseteq \mathcal{T}_{x^{[i-1]}}(p^{[i]})$  para algún  $F \in \Delta_{i+1}$  y el tipo normal de  $\mathcal{T}_x(p^{[i+1]})$  es dual a la subdivisión  $\Delta_{i+1}$  restringida a  $F$ .

Para ahondar en este teorema y ver su demostración, puede revisar Theorem 1.14.12 Revisar [Iriarte \(2022\)](#). Veamos lo que está pasando geoméricamente en este teorema. Considere el Ejemplo 3.2.2 donde construimos la subdivisión regular por capas inducida por  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{D}_3$ . Veamos que el teorema de dualidad en rango mayor nos describe el diagrama a continuación para el polinomio tropical de rango 3  $f_u$ .



Notemos en el diagrama arriba como la base de la fibración  $\mathcal{T}(f_u^{[1]})$  es dual a  $\Delta_1$ . Y así las fibras siguientes son duales a subdivisiones regulares de las caras que aún pueden subdividirse. Hasta llegar a las capas donde la cara ya no pueda seguir subdividiéndose, para ver esto observe  $\mathcal{T}_{x_2, x_3}(f_u^{[3]})$ ,  $\mathcal{T}_{x_1, x_4}(f_u^{[3]})$  y note que son duales a una subdivisión que posee caras imposibles de subdividir.

### 3.3. Análisis geométrico de la perturbación de la demanda

En el capítulo 2 estudiamos la variación de la demanda con respecto al precio. Esto se estudiaba, según la geometría tropical usual, con el complejo de demanda y su correspondiente complejo de precios. En esta sección introduciremos los objetos análogos en el caso de una teoría de rango mayor y los utilizaremos para comprender la demanda de un perturbación de valorizaciones.

En esta teoría, el espacio de cantidades se mantiene igual y continúa siendo  $\mathbb{Z}^k$ , ya que trabajamos con bienes indivisibles. Sin embargo, el espacio de precios es reemplazado por el **espacio de precios perturbados** que corresponde a  $\mathbb{D}_k^n$ . Elementos en el espacio de precios perturbados tienen la forma

$$p = p^{(1)} + \varepsilon p^{(2)} + \dots + \varepsilon^{k-1} p^{(k)} \in \mathbb{D} \quad (3.12)$$

Por lo tanto, podemos interpretar un elemento del espacio de precios perturbados como una perturbación de su primera componente  $p^{(1)}$ . Para esto reemplazamos el símbolo  $\varepsilon$  con un número real para formar una parametrización de números reales que converge a  $x^{(1)}$  para  $\varepsilon$  pequeño. Este punto de vista nos permitirá utilizar los elementos de la geometría tropical de rango mayor para construir una teoría de perturbaciones.

Introduciremos ahora la noción de valoración lexicográfica. Esta induce de manera natural tanto una función de utilidad lexicográfica como una preferencia lexicográfica. El concepto de preferencia lexicográfica no es nuevo en economía y ha sido introducido previamente por otros autores como por ejemplo [Mas-Colell y otros \(1995\)](#).

**Definición 3.3.1.** *Dado un conjunto  $A \subseteq \mathbb{Z}^n$  de cestas. Una valoración lexicográfica de orden  $k$  es una función*

$$\begin{aligned} u : A &\longrightarrow \mathbb{D}_k \\ a &\longmapsto u(a) \end{aligned}$$

Recordemos que  $\mathbb{D}_k$  es isomorfo a  $(\mathbb{R}^k, +)$  con el orden lexicográfico, por lo que si el lector lo desea, puede reemplazar  $\mathbb{D}_k$  por  $\mathbb{R}^k$  en la definición arriba o en el resto de esta sección.

Fijando un vector de precios  $p \in \mathbb{D}_k$ . Obtenemos una **función de utilidad lexicográfica**

$$\begin{aligned} A \subseteq \mathbb{Z}^n &\longrightarrow \mathbb{D}_k \\ x &\longmapsto u(x) - \langle x, p \rangle. \end{aligned}$$

La correspondiente preferencia lexicográfica estará dada por fijar  $x \preceq y$  si y solo si

$$u(x) - \langle x, p \rangle \preceq u(y) - \langle y, p \rangle$$

como una desigualdad en  $\mathbb{D}_k$ .

Dado un agente con valoración lexicográfica, podemos definir su demanda como aquel conjunto de cestas que maximiza su utilidad. Sin embargo, como todo elemento de  $\mathbb{D}_k$  es de la forma

$$x = x^{(1)} + \varepsilon x^{(2)} + \varepsilon^2 x^{(2)} + \dots + \varepsilon^{k-1} x^{(k-1)},$$

tenemos que la influencia de  $x^{(i+1)}$  es despreciable con respecto a la influencia de los términos anteriores. Puesto que  $\varepsilon^i$  es despreciable con respecto a  $\varepsilon^{i-1}$ .

Así introducimos la *i-ésima aproximación de la demanda* como el conjunto que maximiza solo las primeras  $i$  coordenadas. Más precisamente tenemos la siguiente definición.

**Definición 3.3.2.** Dada una valorización lexicográfica  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{D}_k$ , un precio  $p \in \mathbb{D}_k$  y un elemento  $1 \leq i \leq k$ , la *i-ésima aproximación de la demanda* es el conjunto

$$\begin{aligned} D_u^i(p) &= \operatorname{argmax}_{a \in A} \left\{ u^{[i]}(a) - \langle a, p^{[i]} \rangle \right\} \\ &= \operatorname{argmax}_{a \in A} \left\{ (u^{(1)} + \dots + \varepsilon^{i-1} u^{(i)})(a) - \langle a, p^{(1)} + \dots + \varepsilon^{i-1} p^{(i)} \rangle \right\}. \end{aligned}$$

En particular, la **demanda** de  $u$  está dada por  $D_u^i(p)$ . Este es el conjunto de todos los elementos de  $A$  que realmente maximiza la expresión  $u(a) - \langle a, p \rangle \in \mathbb{D}_k$ .

Notemos que para todo  $i < j$  tenemos  $D_u^i(p) \subseteq D_u^j(p)$ .

El siguiente resultado nos muestra como se relaciona el concepto de demanda en rango mayor con la demanda de su correspondiente aproximación.

**Proposición 3.3.1.** La *i-ésima aproximación de la demanda* corresponde con la demanda de su correspondiente perturbación. Más precisamente, tenemos

$$D_u^i(p) = D_{u^{(1)} + \delta u^{(2)} + \dots + \delta^i u^{(i+1)}}(p^{(1)} + \delta p^{(2)} + \dots + \delta^i p^{(i+1)})$$

para todo  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  suficientemente pequeño.

**Demostración.** Esto es parte del enunciado de la Proposición 3.2.1 enunciada en la sección anterior.

**Corolario 3.3.1.** *Si tenemos una perturbación de grado  $i$  en  $\delta$  y la extendemos a una perturbación de grado  $i + 1$  en  $\delta$  entonces la demanda decrece, esto es,*

$$D_{u^{(1)}+\dots+\delta^{i-1}u^{(i)}}(p^{(1)} + \dots + \delta^{i-1}p^{(i)}) \supseteq D_{u^{(1)}+\dots+\delta^i u^{(i+1)}}(p^{(1)} + \dots + \delta^i p^{(i+1)})$$

**Demostración.** Esto se debe a que ambos conjuntos son respectivamente iguales a  $D_u^{i+1}(p)$  y  $D_u^i(p)$ , y se cumple que  $D_u^{i+1}(p) \subseteq D_u^i(p)$ .  $\square$

La proposición anterior marca la conexión entre las valuaciones lexicográficas y la perturbación de valuaciones. Una aplicación de esto es el principio de correspondencia competitiva de perturbaciones, para enunciarlo, diremos que una familia de agentes con valoraciones lexicográficas  $\{u^j : A_j \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{D}_k\}_{j \in J}$  tiene un **equilibrio competitivo lexicográfico** para la cesta  $x \in A := \sum_{j \in J} A_j$  y el precio  $p \in \mathbb{D}_k$  si existen cestas  $x_j \in D_{u^j}^k(p)$  tales que  $x = \sum_{j \in J} x_j$ .

**Teorema 3.3.1** (Correspondencia competitiva de perturbaciones). *Consideremos una familia de agentes con valoraciones lexicográficas  $\{u^j : A_j \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{D}_k\}_{j \in J}$ . Esta familia de agentes posee un equilibrio competitivo lexicográfico para un inventario  $x \in A$  y un precio  $p \in \mathbb{D}_k$  si y solo cada una de las familias de agentes*

$$\{u^{(1)} + \delta u^{(2)} + \dots + \delta^i u^{(i+1)}\}_{j \in J}$$

*tiene un equilibrio competitivo, para todo  $1 \leq i \leq k$  y para todo  $\delta_{>0}$  suficientemente pequeño.*

**Demostración.** Cada valoraciones lexicográfica  $u^j$  induce un polinomio tropical de rango mayor  $f_{u^j}$ . El producto de dichos polinomios nos da  $f_U$  donde  $U$  es la *valoración agregada* de la familia. De la misma forma a como sucede en rango uno, existe un equilibrio competitivo lexicográfico para un inventario  $x$  a un precio  $p$  si y solo si

$$x \in D_U^k(p).$$

Así, tenemos  $x \in D_U^i$  para todo  $1 \leq i \leq k$ . Por el teorema arriba, esto sucede si y solo si, para todo  $1 \leq i \leq k$  y todo  $\delta > 0$  suficientemente pequeño tenemos

$$x \in D_{U^{(1)}+\delta U^{(2)}+\dots+\delta^i U^{(i+1)}}(p^{(1)} + \delta p^{(2)} + \dots + \delta^i p^{(i+1)})$$

Como la valoración  $U^{(1)} + \delta U^{(2)} + \dots + \delta^i U^{(i+1)}$  es la valoración agregada de la familia

$$\{u^{(1)} + \delta u^{(2)} + \dots + \delta^i u^{(i+1)}\}_{j \in J}$$

para todo  $\delta > 0$  suficientemente pequeño tenemos que existe un equilibrio competitivo para esta familia en el precio

$$p^{(1)} + \delta p^{(2)} + \dots + \delta^i p^{(i+1)}.$$

$\square$

Utilizaremos la  $i$ -ésima aproximación de la demanda para construir el equivalente al complejo de demanda en rango superior, este es el *complejo de demanda por capas*.

**Definición 3.3.3.** Sea  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{D}_k$ . Llamamos **Complejo de Demanda por Capas** a la familia de complejos poliedrales

$$\Delta_1(u) \leq \cdots \leq \Delta_k(u)$$

en que el  $i$ -ésimo complejo poliedral esta conformado por todas los poliedros de la forma  $\text{conv}(D_u^i(p))$  para algún  $p \in \mathbb{D}_n^k$ .

**Proposición 3.3.2.** Cada familia  $\Delta_i$  es un complejo poliedral balanceado. Además  $\Delta_{i+1}$  subdivide a  $\Delta_i$  para cada  $i$ .

*Demostración.* Esta es una consecuencia de la Proposición 3.2.1 vista en la sección anterior.  $\square$

**Definición 3.3.4.** Llamamos **Locus de precios de indiferencia fibrado** al conjunto  $\mathcal{L}_u$

$$\mathcal{L}_u = \max_{a \in A} \left\{ p \in \mathbb{D}_k^n : |D_u^k(p)| > 1 \right\}.$$

Notemos que  $\mathcal{L}_u$  coincide exactamente con la hipersuperficie tropical de rango mayor  $\mathcal{T}(f_u)$ . El término *fibrado* que acuñamos al complejo de precios proviene del hecho que estamos viendo  $\mathcal{T}(f_u)$  desde el punto de vista de la fibración. Como vimos antes,  $\mathcal{T}(f_u)$  tiene de forma natural una fibración iterada y la vemos como el diagrama

$$\mathcal{T}(f_u) : \mathcal{T}(f_u^{[k]}) \rightarrow \mathcal{T}(f_u^{[k-1]}) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{T}(f_u^{[1]}).$$

El teorema de dualidad en rango mayor 3.2.1 nos da un método para encontrar el complejo de demanda por capas a través de la fibración del complejo de precios. Esto nos provee un algoritmo para obtener la envoltura convexa de la demanda de una perturbación de una valoración.

**Teorema 3.3.2** (Teorema de dualidad para perturbaciones). Sea  $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{D}_k$  una valoración lexicográfica. Consideremos la demanda de la perturbación formada por las primeras  $i$ -coordenadas de la valoración, esto es,

$$D_{u^{(1)+\delta u^{(2)}+\cdots+\delta u^{(i+1)}}(p^{(1)} + \delta p^{(2)} + \cdots + \delta^i p^{(i+1)}).$$

Entonces, este conjunto coincide con el conjunto  $D_u^i(p)$ , y este es la célula en complejo de demanda por capas dual a la célula en el complejo de precios conteniendo a  $p$  en su interior relativo. Donde la dualidad está da por el Teorema de dualidad de rango mayor.

*Demostración.* Esta es una consecuencia del Teorema de dualidad de rango mayor 3.2.1 y la igualdad

$$D_u^i(p) = D_{u^{(1)+\delta u^{(2)}+\cdots+\delta u^{(k)}}(p^{(1)} + \delta p^{(2)} + \cdots + \delta^i p^{(k)})$$

de la proposición 3.3.1.  $\square$

Recordemos que una subdivisión de un politopo reticulado es unimodular si no se puede subdividir más utilizando solo politopos reticulados. Diremos que un complejo de demanda es unimodular si la subdivisión que la produce es unimodular.

Concluamos esta sección enunciando el siguiente corolario.

**Corolario 3.3.2.**

1. *Una perturbación preserva la demanda si y solo si todas las capas del complejo de demanda son iguales.*
2. *Si una valoración tiene complejo de demanda unimodular entonces toda perturbación de la valorización del agente preserva la demanda.*

***Demostración.*** La primera parte es una conclusión directa del algoritmo dado por el teorema de dualidad para perturbaciones. La segunda parte se debe a que toda subdivisión unimodular no acepta subdivisiones más refinadas, y por lo tanto la subdivisión por capas debe ser constante, luego aplica la primera parte del corolario.

## Capítulo 4

# Resultados, conclusiones y recomendaciones

En vista de lo estudiado y los objetivos de este manuscrito, destacamos a continuación lo más relevante.

### 4.1. Resultados

Nuestro teorema de Hemicontinuidad superior de la demanda 3.1.1 entrega el punto de partida para comenzar a estudiar la caracterización de la demanda ante perturbaciones (en los precios y valoraciones de los agentes). Esto nos dice que la demanda, en efecto, varía (decrecientemente) ante perturbaciones. El problema de este enfoque es que no nos dice explícitamente como varía ni con qué conjuntos caracterizarla. Aquí el enfoque que entrega la geometría tropical de rango mayor aporta nuevos resultados en el estudio de la demanda indivisible. El teorema de dualidad de rango mayor 3.2.1 entrega el enfoque geométrico adecuado. Este nos propone ver y definir los nuevos objetos geométricos de la geometría tropical de rango mayor como nuevos objetos económicos. El nuevo conjunto de demanda por capas definido por el conjunto

$$D_u^i(p) = \operatorname{argmax}_{a \in A} \left\{ u^{[i]}(a) - \langle a, p^{[i]} \rangle \right\}, \quad p \in \mathbb{D}_n^k, \quad 1 < i < k. \quad (4.1)$$

Define la subdivisión regular por capas

$$\underline{\Delta}^u(f_u) = \{ \operatorname{conv}(D_u^i(p)) : p \in \mathbb{D}_k^n \} \quad (4.2)$$

y la hipersuperficie tropical de rango  $k$

$$\mathcal{T}(f_u) = \max_{a \in A} \left\{ p \in \mathbb{D}_k^n : |D_u^k(p)| > 1 \right\}. \quad (4.3)$$

Nuestro Teorema de dualidad para perturbaciones 3.3.2 nos entrega la caracterización para la variación de la demanda. Tomando el punto de vista de la fibración, el objeto  $\mathcal{T}(f_u)$  es el diagrama

$$\mathcal{T}(f_u) : \mathcal{T}(f_u^{[k]}) \rightarrow \mathcal{T}(f_u^{[k-1]}) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{T}(f_u^{[1]}).$$

y la fibra  $\mathcal{T}_x(f_u^{[i+1]})$  es una hipersuperficie tropical de rango uno. Esta se mantiene constante cuando  $x$  varía en el interior de una célula  $C(F) \subseteq \mathcal{T}_{x^{[i-1]}}(f_u^{[i]})$  para algún  $F \in \Delta_{i+1}$  y el tipo normal de  $\mathcal{T}_x(f_u^{[i+1]})$  es dual a la subdivisión  $\Delta_{i+1}$  restringida a  $F$ . De esta forma la demanda, dadas perturbaciones en precio y valoración, de un agente, es caracterizada en esencia por las caras de las capas de la subdivisión regular por capas.

Finalmente, nuestro Corolario 3.3.2 nos proporciona los siguientes resultados. Aseguramos que se preserva la demanda si y solo si todas las capas del complejo de demanda son iguales. Esto es directo por nuestro Teorema de dualidad para perturbaciones 3.3.2. Por otro lado aseguramos que la demanda también se preserva para toda perturbación de valoración si la valoración tiene complejo de demanda unimodular. Esto geoméricamente es claro. Una subdivisión regular unimodular, visto como complejo poliedral, no posee caras que puedan subdividirse.

Así, obtenemos criterios para los cuales una perturbación preserva la demanda. No es evidente que existe una manera natural de enunciar criterios para los cuales una perturbación preserva la demanda, sin embargo nuestro enfoque proporciona herramientas para construir dichos criterios y lo que hemos hecho es solo el punto de partida para un posible estudio sistemático de la preservación de la demanda ante perturbaciones.

## 4.2. Conclusiones

Luego de ver nuestros resultados, es interesante notar las siguientes conclusiones.

- ★ Este trabajo se inició bajo la *sospecha* o *intuición* de que la geometría tropical en rango mayor generalizaba los objetos económicos descritos por [Baldwin y Klemperer \(2019\)](#). Más aún, se esperaba con ansiedad que estos nuevos objetos de geometría tropical de rango mayor tuvieran interpretación económica.

Finalmente, para nuestro alivio y alegría, podemos asegurar que el estudio económico, según los autores aquí referidos, usando geometría tropical de rango mayor tiene todo el sentido, tanto matemático como económico.

- ★ La conclusión que consideramos más notable es una enseñanza que no esperábamos encontrar cuando comenzó el trabajo.

hasta donde pudimos comprobar estudio de las preferencias lexicográficas en la economía juegan un rol menor dentro del análisis de las preferencias. Su aparición en la literatura se reduce, muchas veces, a un ejemplo de un tipo de preferencia. Sin embargo como pudimos comprobar en este documento las preferencias lexicográficas, provenientes de valoraciones lexicográficas, están íntimamente relacionadas con la perturbación de preferencias de consumidores. Este punto de vista es nuevo hasta donde pudimos comprobar y podría ser una indicación para el posible estudio sistemático de preferencias lexicográficas. Esto no solo en el caso de bienes indivisibles. Esta teoría podría introducir la componente perturbativa en la teoría del consumidor.

Según nuestra heurística, podría ser posible que un teorema de la teoría del consumidor se convierta en un teorema sobre perturbaciones reemplazando la preferencia por una preferencia lexicográfica.

### 4.3. Recomendaciones

Cuando comenzamos este trabajo, la motivación inicial era dar respuesta a la pregunta.

Sea  $J$  una familia finita de agentes participando en una subasta. Una subasta logra vender todo su inventario u oferta cuando existe equilibrio competitivo. Cuando hablemos de agentes ganadores se entenderá que son un subconjunto de  $J$  para el que existe equilibrio competitivo. Ante el evento de que existan diferentes asignaciones que respeten el equilibrio competitivo

★ ¿Cual asignación es la más correcta? en términos de bienestar generado para el ganador.

Nuestro anhelo es la posible existencia de un proceso que permite discriminar, entre las posibles asignaciones, la *mejor* asignación en términos de bienestar generado para los agentes. Ya que la decisión de la asignación, en estos casos, es tomada por factores externos, como el azar<sup>1</sup>. El ejemplo a continuación ilustra la motivación de estas preguntas. Estamos interesados en los casos donde los agentes tienen igualdad en la utilidad por sus pujas.

**Ejemplo 4.3.1** (Rental harmony). *Tres amigos deciden arrendar un departamento de tres habitaciones. Cada amigo valora cada habitación individualmente como vemos en la Tabla 4.1.*

Amigo	Habitación grande	Habitación mediana	Habitación pequeña
$u^1$	400	300	100
$u^2$	450	350	100
$u^3$	500	200	100

Tabla 4.1: Valoraciones individuales de tres amigos por diferentes habitaciones

Verifiquemos previamente en *polymake* para qué cestas existe (si es que existe) equilibrio competitivo.

```

1 tropical > for (my $i=0; $i<$ds->N_POINTS; ++$i) {print $dehomog->row($i),
2     ": ", $cells->row($i)->size(), "\n" }
3 -1 -2 0: 3
4 0 -1 -1: 2
5 -2 0 -1: 2
6 0 -1 0: 2
7 -2 0 0: 2
8 -1 0 0: 2

```

<sup>1</sup>En correspondencia privada con Paul Klemperer nos mencionó que la decisión tomada por los bancos centrales en estos casos es *lanzar una moneda*.

```

9  0  0  -1:  1
   -1 -1  0:  4
11 -3  0  0:  1
   0  0  0:  1
13  0 -1 -2:  2
   0 -2 -1:  2
15 -1  0 -2:  2
   0  0 -3:  1
17  0 -3  0:  1
   -1 -1 -1:  4
19  0  0 -2:  1
   0 -2  0:  2
21 -1  0 -1:  2
   -2 -1  0:  1

```

Luego vemos que toda cesta está en al menos una célula de la subdivisión dual. Es decir, el equilibrio competitivo existe para todas las cestas (que respeten la oferta de 3 habitaciones). Ahora considere el vector de precio competitivo ordenado  $p_1 = (400, 300, 100)$  donde la primera coordenada es asociada a la habitación grande, la segunda a la mediana y la tercera a la pequeña. De esta forma vemos que los agentes tienen las utilidades

$$f_{u^1}(p_1) = \text{máx}\{0, 0, 0\}$$

$$f_{u^2}(p_1) = \text{máx}\{50, 50, 0\}$$

$$f_{u^3}(p_1) = \text{máx}\{100, 100, 0\}$$

Y notemos que los tres amigos obtienen un empate en sus utilidades con las primeras dos habitaciones.

De esta forma, en este y otros casos similares, el subastador no tiene interés en discriminar a quien entregar las asignaciones, dado que todos tienen igualdad de utilidad en las primeras dos coordenadas, por lo que hay indiferencia entre las asignaciones y se ven definidas por factores como el azar. Es por esto que lanzamos un posible estudio de estos casos con *matrimonios estables*

### 4.3.1. Matrimonios estables

Una forma matemática que permite modelar el problema de asignación es el problema de los matrimonios estables. Supongamos que tenemos dos conjuntos  $A$  y  $B$ , ambos con misma cardinalidad, tal que que los elementos de  $A$  quieren emparejarse con un solo elemento de  $B$ , y viceversa. Además, todos los elementos entregan un orden para los elementos del otro conjunto, priorizando los elementos con quienes más ganas tienen de emparejarse.

**Definición 4.3.1.** Dado dos conjuntos  $A$  y  $B$  con misma cardinalidad. Un problema de matrimonio estable tiene solución si es posible encontrar emparejamientos entre  $a \in A$  y  $b \in B$ , denotados  $\{a\} \leftrightarrow \{b\}$ , tales que:

1.  $\forall a \in A, b \in B$  tal que  $\{a\} \leftrightarrow \{b\}$ ; y  $\forall b \in B, a \in A$  tal que  $\{b\} \leftrightarrow \{a\}$

2. Si  $a \in A$  y  $b \in B$  son tales que  $\{a\}$  no se empareja  $\{b\}$ . Entonces  $\{a\}$  no prefiere a  $\{b\}$  ni al revés, por sobre sus emparejamientos.

Es entonces que encontramos de todo nuestro interés y dejamos de posible recomendación el estudiar con geometría tropical de rango mayor si un problema de emparejamiento estable entre un conjunto de *agentes ganadores* y un conjunto de *asignaciones* (o premios) tiene solución.

Preliminarmente hemos pensado como sería esto usando geometría tropical de rango mayor. Más específicamente de rango 2.

Los agentes presentarían funciones de valoración de la forma

$$u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{D}$$

Esto se traduce en un elemento  $u(a) = u^{(1)}(a) + \varepsilon u^{(2)}(a)$  con  $\varepsilon^2 = 0$ . Lo anterior se interpreta de la siguiente manera:

- ★ El agente valora en la cantidad  $u^{(1)}(a)$  la cesta  $a$  y ubica la cesta  $a$  en una posición  $u^{(2)}(a)$  de una lista que indique sus preferencias directas por todas sus pujas posibles ante un posible empate en sus utilidades (un posible modo es asignar el número -1 al que más prefiera y números menores al resto en el orden que los prefiera, así al momento de analizar la preferencia lexicográfica, ganará la asociada al -1)

Finalmente, un teorema que nos gustaría que fuese cierto es el siguiente

**Teorema 4.3.1** (Clasificación de los equilibrios competitivos estables). *Una familia de agentes  $J$  con valorizaciones refinadas  $u^j$  posee equilibrio competitivo si y solo si el conjunto  $\{u^j\}_{j \in J}$  posee un equilibrio competitivo de rango mayor.*

# Bibliografía

- BALDWIN, E. y KLEMPERER, P. (2013). *Tropical geometry to analyse demand*. Unpublished paper.
- (2019). «Understanding preferences: “demand types”, and the existence of equilibrium with indivisibilities». *Econometrica*.
- CREMONA, L (1885). *Elements of projective geometry*. Clarendon Press.
- DANILOV, V; KOSHEVOY, G y MUROTA, K (2001). *Discrete convexity and equilibria in economies with indivisible goods and money*. *Mathematical Social Sciences*, 41(3), 251-273.
- DANILOV, V. I. y KOSHEVOY, G. A. (2004). *Discrete convexity and unimodularity*. I. *Advances in Mathematics*, 189(2), 301-324.
- GERGONNE, M (1825 – 1826). «Optique». *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, **16**, pp. 307–314.
- HAMPE, S y JOSWIG, M (2017). «Tropical computations in polymake». *Algorithmic and experimental methods in algebra, geometry, and number theory*. Springer, Cham., pp. 361–385.
- HOWARD, B (2007). *Edge unimodular polytopes*. In Mini-Workshop: Projective normality of smooth toric varieties (Vol. 39).
- IRIARTE, HERNÁN (2022). *Polyhedral, Tropical and Analytic Geometry of Higher Rank*. Tesis doctoral, Sorbonne Université, École Polytechnique.
- KLEMPERER, PAUL (2009). «A new auction for substitutes: Central-Bank liquidity auctions, ‘toxic asset’ auctions, and variable product-mix auctions». *Journal of the European Economic Association*.
- (2010). «The product-mix auction: A new auction design for differentiated goods». *Journal of the European Economic Association*, **8((2-3))**, pp. 526–536.
- MACLAGAN, D (2012). «Introduction to tropical algebraic geometry. In Tropical geometry and integrable systems». *Amer. Math. Soc. Providence, RI*, **580**, pp. 1–19.
- MACLAGAN, D y STURMFELS, B (2021). *Introduction to tropical geometry*. volumen 161. American Mathematical Society.

- MAGRI, FRANCO (1978). «Recognizable sets with multiplicities in the tropical semiring». *In International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, pp. 107 – 120.
- MAS-COLELL, A; WHINSTON, M y GREEN, J (1995). *Microeconomic theory*. volumen 1. New York: Oxford university press.
- MIKHALKIN, G (2004). «Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces». *Topology*, **43(5)**, pp. 1035–1065.
- MILGROM, P y STRULOVICI, B (2009). «Substitute goods, auctions, and equilibrium». *Journal of Economic theory*, **144(1)**, pp. 212–247.
- MILGROM, PAUL (1987). «Auction Theory». *Advances in economic theory: Fifth world congress*, **1**.
- MONOD, A; LIN, B; YOSHIDA, R y KANG, Q (2018). «Tropical geometry of phylogenetic tree space: a statistical perspective». *arXiv preprint arXiv:1805.12400*.
- OK, EFE (2004). *Real analysis with economic applications*. Princeton University Press.
- PIN, JEAN-ERIC (1998). «Tropical semirings». *Cambridge Univ. Press*, **11(1)**, pp. 50 – 69.
- PONCELET, M (1817 – 1818). *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, **8**, pp. 201–232.
- VICKREY, W (1961). «Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders». *The Journal of finance*, **16**, pp. 8 – 37.
- WALRAS, LEÓN (1896). «Éléments d'économie politique pure, ou, Théorie de la richesse sociale». *F. Rouge*.
- ZHANG, L; NAITZAT, G y LIMG, L (2018). «Tropical geometry of deep neural networks». *International Conference on Machine Learning*, pp. 5824 – 5832.
- ZIEGLER, G (2012). *Lecture in polytopes*. volumen 152. Springer Science Business Media.

## Apéndice A

# Utilizando Polymake para objetos tropicales

Polymake es un software matemático de código abierto lanzado en 1997 orientado a la investigación en geometría poliedral. Mediante sus diferentes aplicaciones se puede dar tratamiento a objetos geométricos como politopos, poliedros, matroides, grafos, hipersuperficies tropicales, entre otros. Los sistemas operativos compatibles incluyen distribuciones de Linux, FreeBSD y Max OS.

La aplicación de `polymake` en la que estamos interesados es “tropical”, donde podemos visualizar hipersuperficies tropicales de polinomios tropicales, subdivisiones duales a estas y, para el uso práctico, cálculo de la existencia de equilibrio competitivo en posibles asignaciones de una subasta de productos combinados. Para profundizar más en la aplicación “tropical” de `polymake` y ver otras aplicaciones prácticas de computación tropical puede revisar [Hampe y Joswig \(2017\)](#).

### A.1. Instalación y lanzamiento

Utilizamos la distribución de GNU/Linux basada en Debian, Ubuntu. Polymake es parte de la biblioteca de paquetes de Debian de manera canónica. Abrimos la consola de ubuntu y luego instalamos usando el comando

```
sudo apt-get install polymake
```

Así, ejecutando la siguiente línea en la consola

```
1 polymake
```

tenemos el lanzamiento del programa y deberíamos ver lo siguiente

```
1 Welcome to polymake version 4.0
  Copyright (c) 1997–2020
3 Ewgenij Gawrilow, Michael Joswig, and the polymake team
  Technische Universitat Berlin, Germany
```

```

5 https://polymake.org
7 This is free software licensed under GPL; see the source for copying
  conditions.
  There is NO warranty; not even for MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A
  PARTICULAR PURPOSE.
9
  Press F1 or enter 'help;' for basic instructions.
11
  Application polytope currently uses following contributed and third-party
  software packages:
13 bliss , cdd , flint , graphviz , libnormaliz , lrs , permlib , polyDB , povray , ppl ,
  sketch , sympol , threejs , tikz , tosimplex
  For more details: show_credits;
15 polytope >

```

Donde la aplicación natural con la que inicia el programa es “polytope”. Para ejecutar la aplicación “tropical” escribimos

```
polytope > application "tropical";
```

y debemos ver

```

1 Application tropical currently uses following contributed and third-party
  software packages:
  TropLi , atint , bliss , cdd , flint , gfan , graphviz , libnormaliz , lrs , permlib ,
  polyDB , povray , ppl , sketch , sympol , threejs , tikz , tosimplex
3 For more details: show_credits;
  tropical >

```

Luego el lanzamiento está listo para trabajar con objetos tropicales.

## A.2. Visualizar formas de hipersuperficies tropicales

Tenemos dos caminos para declarar una hipersuperficie tropical, una es declarar el polinomio tropical asociado y transformarlo a hipersuperficie y, el método que preferimos, declarar nativamente la hipersuperficie y obtener, cuando sea necesario, su polinomio asociado a través de ella.

Considere, a modo de ejemplo, el polinomio

$$f(x, y) = "3x^3 + x^2y + xy^2 + 3y^3 + x^2 - 1xy + y^2 + x + y + 3" \quad (\text{A.1})$$

que es la tropicalización de la variedad algebraica que [Maclagan \(2012\)](#) expone en el ejemplo 2.5, segundo inciso. Para graficar la curva tropical de este polinomio, debemos homogenizarlo. Esto es debido a que `polymake` trabaja con el plano proyectivo, así agregamos una coordenada adicional al inicio. De esta forma escribimos la hipersuperficie  $\mathcal{T}(f)$  en

función de los monomios y coeficientes de  $f$ , luego lo visualizamos con el comando `->VISUAL` como sigue.

```

1 tropical > $Tf= new Hypersurface<Min>(MONOMIALS
=>[[0,3,0],[0,2,1],[0,1,2],[0,0,3],[1,2,0],[1,1,1],[1,0,2],[2,1,0],[2,0,1],
3 [3,0,0]],
COEFFICIENTS=>[3,0,0,3,0,-1,0,0,0,3]);
5 tropical > $Tf -> VISUAL;
    
```

Así, la visualización de  $\$Tf$  es la Figura A.1

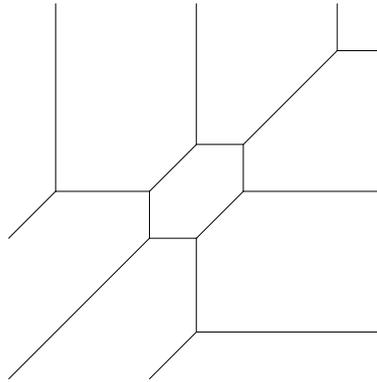


Figura A.1: Curva tropical elíptica  $\mathcal{T}(f)$  de salida en polymake.

La salida de una visualización es abierta en el navegador predeterminado del sistema operativo donde estemos trabajando, ahí podemos manipular el objeto y obtener su archivo vectorial SVG. Gracias a esto, el objeto de salida tiene la estructura de dibujo vectorial, reconociendo aristas y vértices.

### A.3. Determinar equilibrio competitivo

Estamos interesados en la noción de equilibrio competitivo en una economía con múltiples agentes ante una oferta de  $n$  tipos de bienes. De esta manera consideramos la demanda y valoración agregada como lo vimos en 2.3.

Consideremos las valoraciones de dos agentes que muestra el ejemplo B.6 en Baldwin y Klemperer (2019). Declarando las siguientes hipersuperficies

```

tropical > $us = new Hypersurface<Max>(MONOMIALS
=>[[ -2,0,0],[ -1,-1,0],[0,-1,-1],[ -1,0,-1]],
2 COEFFICIENTS=>[0,40,40,30]);
4 tropical > $uc = new Hypersurface<Max>(MONOMIALS
=>[[ -2,0,0],[ -1,-1,0],[0,-1,-1],[ -1,0,-1]],
COEFFICIENTS=>[0,0,50,0]);
    
```

Estos dos locus de precios de indiferencia,  $\$us$  y  $\$uc$ , los unimos mediante el producto tropical de los dos polinomios tropicales asociados.

```
1 tropical > $U = new Hypersurface<Max>(POLYNOMIAL=>$uc->POLYNOMIAL * $us->
  POLYNOMIAL);
```

Los monomios del polinomio tropical que definen a  $\$U$  surgen como los vértices de las células de su subdivisión regular dual. Para reinterpretar los vértices como cestas, los deshomogeneizamos.

```
1 tropical > $ds = $U->dual_subdivision();
  tropical > $dehomog = $ds->POINTS->minor(All,~[0,1]);
3 tropical > $cells = transpose($ds->MAXIMAL_CELLS);
```

Luego para cada cesta o monomio podemos imprimir el número de células que lo contienen.

```
1 tropical > for (my $i=0; $i<$ds->N_POINTS; ++$i) {print $dehomog->row($i), ":
  ", $cells->row($i)->size(), "\n" }
0 0: 1
3 -1 0: 3
  -2 -2: 1
5 -2 0: 1
  0 -1: 3
7 -1 -1: 0
  -1 -2: 3
9 -2 -1: 3
  0 -2: 1
```

Luego vemos que cada cesta, excepto  $(1, 1)$ , está en al menos una célula de la subdivisión dual. Es decir, el equilibrio competitivo existe precisamente en las 8 cestas restantes. De hecho, esto puede verse en la subdivisión dual que tenemos en la Figura A.2(a) y notar que hay un punto interior que no es vértice. Esto nos advierte que hay un punto que, mediante la función altura, no alcanza el techo y, por ende, no existe equilibrio competitivo en esa cesta.

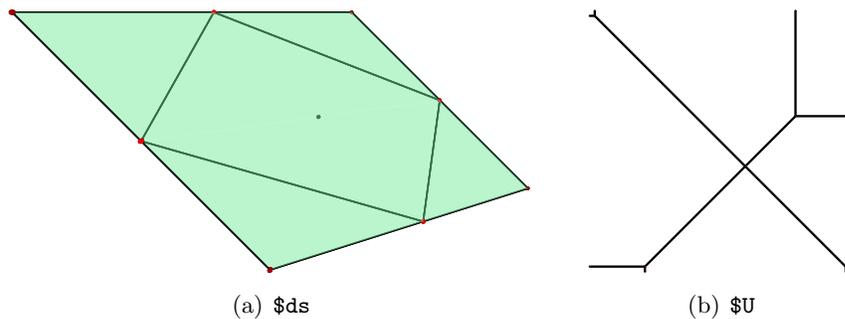


Figura A.2: Visualización de objetos tropicales en polymake

## A.4. Códigos de figuras

### 1. Ejemplo 1.2.3

(a)

```

1      $H1= new Hypersurface<Max>(MONOMIALS
2      =>[[0,3,3],[1,2,3],[1,3,2],[2,1,3],
3      [2,2,2],[1,3,2],[3,3,0],[3,2,1],
4      [3,1,2],[3,0,3],[4,2,0],[4,1,1],
5      [4,0,2],[5,1,0],[5,0,1],[6,0,0]],
6      COEFFICIENTS=>[0,0,0,0,1,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,0]);

```

(b)

```

1      $H2= new Hypersurface<Max>(MONOMIALS
2      =>[[0,3,3],[1,2,3],[1,3,2],[2,1,3],
3      [2,2,2],[2,3,1],[3,3,0],[3,2,1],
4      [3,1,2],[3,0,3],[4,2,0],[4,1,1],
5      [4,0,2],[5,1,0],[5,0,1],[6,0,0]],
6      COEFFICIENTS=>[0,3,3,2,3,2,0,2,2,0,2,3,2,3,3,0]);

```

(c)

```

1      $H12= new Hypersurface<Max>(POLYNOMIAL=>$H1->POLYNOMIAL * $H2->
POLYNOMIAL);

```

(d)

```

1      $H4 = new Hypersurface<Max>(MONOMIALS
2      =>[[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]], COEFFICIENTS
3      =>[1,1,1,1])

```

(e)

```

1      $H5 = new Hypersurface<Max>(MONOMIALS
2      =>[[2,0,0,0],[1,1,0,0],[1,0,1,0],[1,0,0,1],[0,2,0,0],[0,0,2,0],
3      [0,0,0,2]], COEFFICIENTS=>[6,5,4,3,3,2,1]);

```

# Índice analítico

- Abanico, 13
- Cara de un poliedro respecto a un elemento  $y \in \mathbb{R}^n$ , 11
- Cesta, 35
- Cesta relevante, 46
- Complejo
  - de Gröbner, 22
  - de precios, 38
- Complejo poliedral, 12
  - balanceado, 14
  - con peso, 14
- CONDición de balance, 14
- Conjunto
  - unimodular, 48
- Cono, 13
  - finitamente generado, 13
  - generado, 13
  - poliedral, 13
- Demanda
  - agregada, 42
- Economía de bienes divisibles, 35
- Economía de bienes indivisibles, 35
- Elemento truncado, 54
- Envoltura
  - convexa de un subconjunto, 7
  - convexa de una función, 9
  - convexa discreta de un subconjunto de puntos, 8
  - convexa discreta de una función, 10
  - cóncava de una función, 9
  - cóncava discreta de una función, 10
- Epigrafo, 8
- Equilibrio
  - competitivo, 46
- Espacio de cantidades, 35
- Espacio de precios, 35
- Fibración iterada, 56
- Función
  - convexa, 9
  - cóncava, 9
  - discretamente convexa, 10
  - discretamente cóncava, 9
- función de utilidad, 36
- Geometría tropical, 18
- Hiperplano, 10
  - en rango mayor, 55
  - racional, 10
- Hipersuperficie tropical, 19
  - de rango  $k$ , 60
- Hipografo, 9
- Interior relativo, 12
- Multiplicación tropical, 17
- Orden lexicográfico, 54
- Poliedro, 11
  - en rango mayor, 55
  - poliedro levantado
    - sobre  $\mathbb{D}_k^n$ , 57
- Polinomio tropical, 18
  - de rango  $k$ , 59
- Politopo, 11
  - de Newton, 25
  - en rango mayor, 55
  - reticulado, 11
- politopo de Newton
  - de un polinomio de rango  $k$ , 61
- Preferencia, 35

- Región de demanda única, 38
- Semianillo tropical de rango  $k$ , 53
- Semiespacio, 10
  - racional, 10
  - en rango mayor, 55
- Soporte
  - de un complejo poliedral, 13
- Subconjunto
  - convexo, 7
  - discretamente convexo, 8
- Subdivisión, 15
  - regular, 16
  - regular por capas, 57
  - regular sobre  $\mathbb{D}_k$ , 57
- Subespacio
  - afín, 12
  - afín generado, 12
- Suma tropical, 17
- Teorema
  - de dualidad, 27
- Tipo de demada, 39
- Vector primitivo, 14